Equations différentielles et radio

Par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

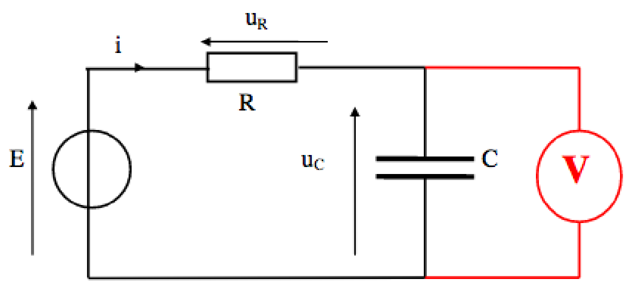
Un radioamateur désireux d'en « savoir plus » sur les outils mathématiques utilisés en « ingénierie radio » rencontrera vite des équations différentielles (dites ED, en abrégé), outils qu'on n'apprend à manipuler que dans l'enseignement supérieur. Le présent article explique de quoi il s'agit, en se bornant à celles d'entre elles directement en rapport avec les notions que tout OM découvre en passant sa licence. Il s'agit des équations différentielles linéaires du 1er et du 2ème ordre à coefficients constants, utiles à l'analyse de circuits électriques à base de résistances, de selfs et de condensateurs. Elles seront présentées ici à travers des exemples concrets de tels circuits.

1- Equations différentielles linéaires du 1er ordre :

Une telle équation relie linéairement une fonction d'une variable réelle (variable qui est très souvent le temps en radio) et sa dérivée première. Par exemple :

$$f'(t) + a.f(t) = b$$

C'est par exemple ce qu'on rencontre en étudiant la charge d'un condensateur à travers une résistance :



Montage pour le relevé de la courbe de charge d'un condensateur.

Quand, à l'instant *t=0*, on branche en série :
-le condensateur de capacité C déchargé
-la résistance R
-le générateur continu de f.e.m. E
On constate que :
-un courant d'intensité *i(t)* variable dans le temps circule dans le circuit
-ce courant charge le condensateur d'une charge *q(t)* variable avec le temps
On mesure alors :
-aux bornes de la résistance, une tension $u_R(t)$ variable avec le temps
-aux bornes du condensateur, une tension $u_C(t)$ variable avec le temps
On est donc en présence de 4 fonctions du temps :
-la charge *q(t)* du condensateur
-l'intensité *i(t)* qui est la dérivée de cette charge, c'est-à-dire que $i(t) = q'(t) = \frac{dq}{dt}$
-les 2 tensions $u_R(t)$ et $u_C(t)$

L'application de la loi de Kirchhoff au circuit conduit à l'équation suivante :

$$u_R(t) + u_C(t) = E \Longrightarrow R.i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \Longrightarrow R.q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E \Longrightarrow q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E}{R}$$

Cette équation est donc bien de la forme $f'(t) + af(t) = b$ avec :

$$f(t) = q(t)\,;a = \frac{1}{RC}\,; b = \frac{E}{R}$$

La solution d'une équation différentielle de la forme $f'(t) + af(t) = b$ dans laquelle a et b sont constantes est de la forme $f(t) = \frac{b}{a} + k.e^{-a.t}$ dans laquelle k est une constante donnée par les conditions aux limites, par exemple par la valeur $f(0)$.

Dans notre exemple, cela aboutit à :

$$q(t) = C.E.(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

En dérivant par rapport au temps, on en déduit l'intensité :

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

En multipliant par R, on obtient la tension aux bornes de la résistance :

$$u_R(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

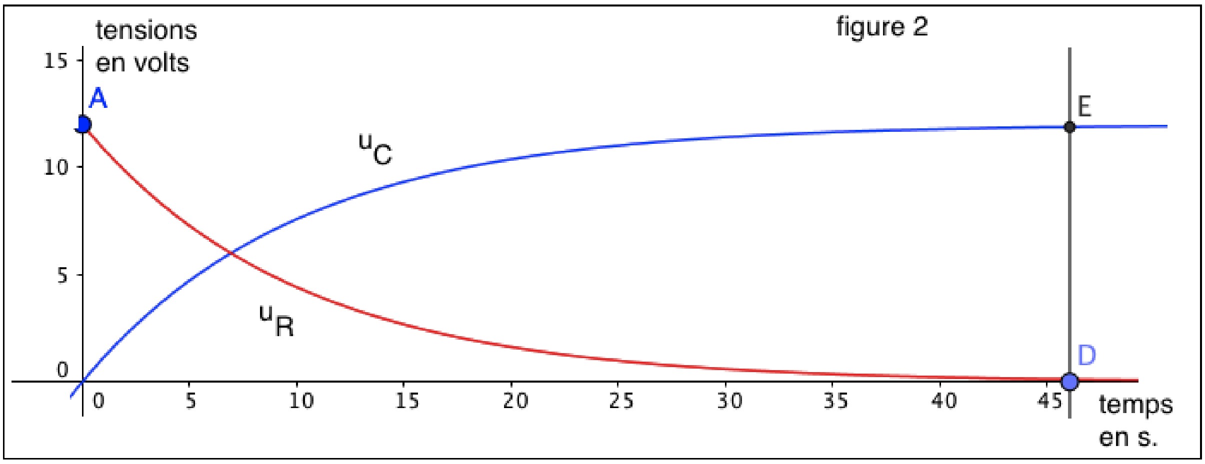
En retranchant de E, on obtient la tension aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = E.(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

A titre d'exemple, si on prend les valeurs numériques suivantes :

$$E = 12\ volts\,; R = 1000\ ohms\,; C = 100\mu F$$

on obtient les 2 courbes représentatives des 2 tensions qui suivent



La courbe représentative de l'intensité est de même forme que celle de la tension aux bornes de la résistance, et la courbe représentative de la charge est de même forme que celle de la tension aux bornes du condensateur, comme l'indiquent leurs équations respectives.

2 - <u>Equations différentielles linéaires du 2ème ordre</u> :

Une telle équation relie linéairement une fonction d'une variable réelle (variable qui est très souvent le temps en radio), sa dérivée première et sa dérivée seconde.

2-1-Rappel concernant la résolution des équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants

Soit l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ dans la quelle y est une fonction de la variable réelle t, et les coefficients sont des constantes.
Sa résolution se fait comme suit :

a- on calcule le discrimant Δ de l'équation associée $x^2 + ax + b = 0$; il vaut $\Delta = a^2 - 4b$

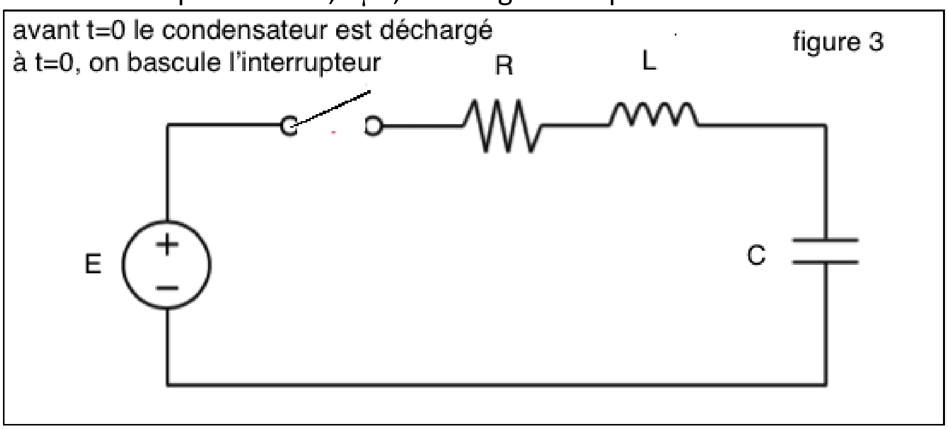
b- si Δ>0, les solutions de l'équation associée sont $x_1 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$; et $x_2 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ et les solutions de l'ED s'écrivent $y = c/b + e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}\left[\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + \mu \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right]$ formule dans laquelle les grandeurs λ et μ sont des constantes données par les conditions aux limites ou initiales.

c- si Δ=0, l'équation associée a une racine double $x_1 = x_2 = \frac{-a}{2}$ et les solutions de l'équation différentielles s'écrivent $y = c/b + e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}[\lambda + \mu t]$ formule dans laquelle les grandeurs λ et μ sont des constantes données par les conditions aux limites ou initiales.

d- si Δ<0, les solutions de l'équation associée sont $x_1 = \frac{-a+j\sqrt{-\Delta}}{2}$; et $x_2 = \frac{-a-j\sqrt{-\Delta}}{2}$ formule dans laquelle les grandeurs j et –j sont les racines complexes de (-1, et les solutions de l'équation différentielles s'écrivent $y = c/b + e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}\left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + \mu \sin\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right]$ formule dans laquelle les grandeurs λ et μ sont des constantes données par les conditions aux limites ou initiales.

2-2-On va à présent examiner une application directe de ce qui précède en considérant les 3 composants suivants :

-une résistance R = 270 ohms
-une self d'inductance L = 0,08 H
-un condensateur de capacité C = 0,5 μF, déchargé au départ



On met les 3 composants en série et on ferme le circuit sur un générateur continu de 12 V de f.e.m. On se propose de calculer en fonction du temps la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = q(t)/C$.
Les conditions initiales sont donc les suivantes :
$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 12\ V$ et $i(0^-) = i(0^+) = 0$
La loi de Kirchoff dans la boucle conduit à l'équation n°1 :

$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \Leftrightarrow L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E$

En remarquant que $q(t) = Cu_c(t) \Rightarrow i(t) = Cu_c'(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = Cu_c''(t)$, on peut transformer cette équation différentielle en la suivante :

$u_c''(t) + \frac{R}{L}u_c'(t) + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{E}{LC}$,

équation n°3 qui est du type de l'équation n°1.

Son équation associée est donc $x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$ dont le discriminant est

$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = \frac{270^2}{0{,}08^2} - \frac{4}{0{,}08*0{,}5*10^{-6}} = -88609375 < 0.$

Donc la solution de l'équation différentielle n°3 s'écrit :

$$u_c(t) = E + \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right).\left[\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + \mu\sin\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right]$$

$u_c(t) = 12 + \exp(-1688t).[\lambda\cos(4707t) + \mu\sin(-4707t)]$

En dérivant, on obtient l'intensité :

$$i(t) = \exp(-1688t).[-\lambda(1688\cos(4707t) + 4707\sin(4707t)) + \mu(4707\cos(4707t) - 1688\sin(4707t))]$$

A t=0, l'intensité et la tension aux bornes du condensateur sont nulles, ce qui permet de de calculer les 2 constantes λ et μ :

$0 = u_c(0) = 12 + \lambda \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = -12}$ et

$0 = i(0) = -\lambda * 1688 + \mu * 4707 \Rightarrow \boldsymbol{\mu = 1688 * \frac{-12}{4707} = -4{,}30}$

D'où l'expression de la tension aux bornes du condensateur

$\boldsymbol{u_c(t) = 12 - \exp(-1688t).[12\cos(4707t) + 4{,}30\sin(-4707t)]}$

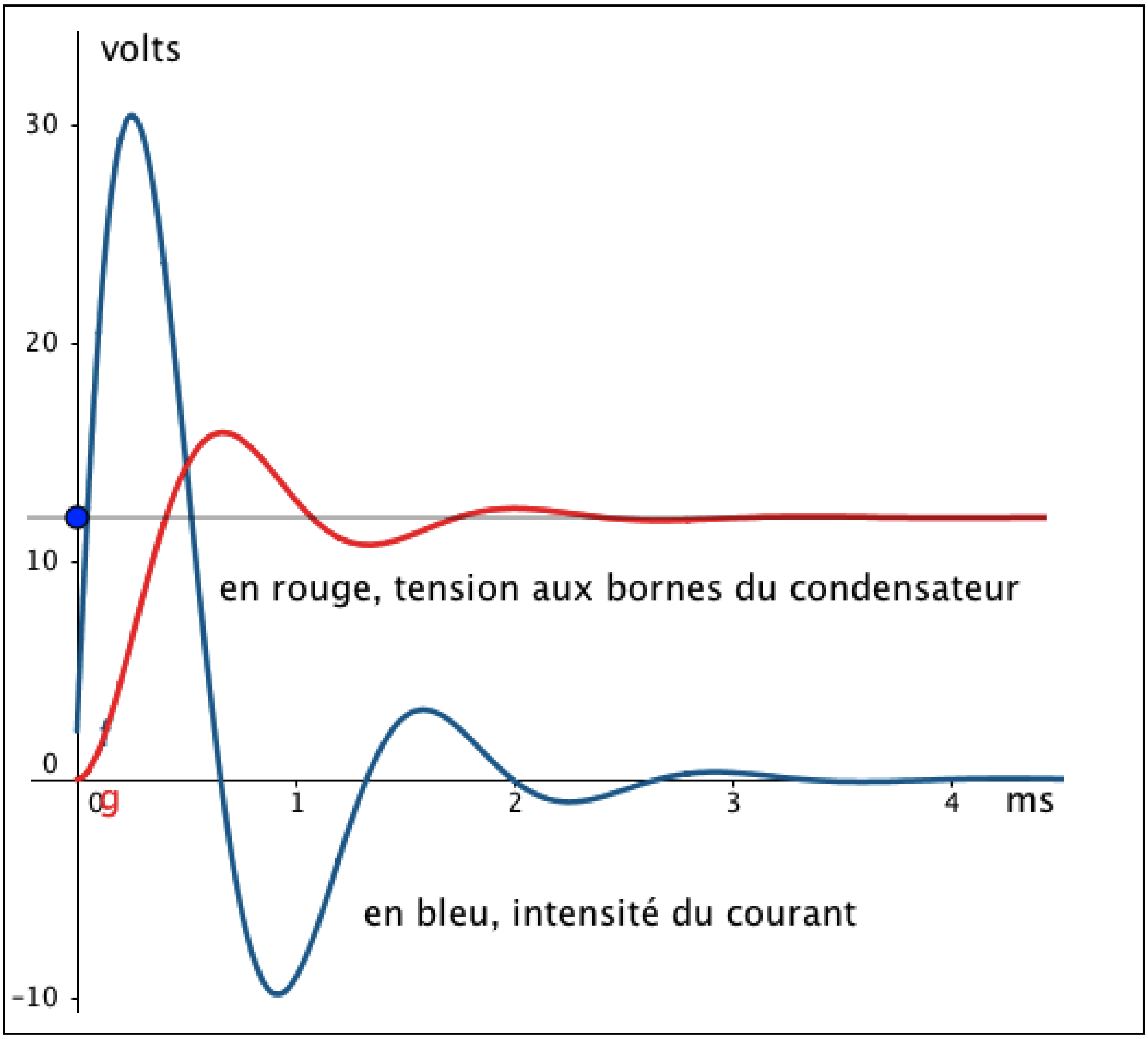
Et, en dérivant, l'expression de l'intensité :

$$i(t) = \exp(-1688t).[-\lambda(1688\cos(4707t) + 4707\sin(4707t)) + \mu(4707\cos(4707t) - 1688\sin(4707t))]$$

$$i(t) = \exp(-1688t).[12 * (1688\cos(4707t) + 4707\sin(4707t)) + 4{,}3 * (4707\cos(4707t) - 1688\sin(4707t))]$$

$\boldsymbol{i(t) = \exp(-1688t).[22280 * \cos(4707t) + 49296 * \sin(4707t)]}$

Les courbes correspondantes sont données par les graphiques ci-dessous :



On constate qu'après 4 ms, il n'y a plus de courant dans le circuit et la charge du condensateur est stabilisée à 12 volts.

Nota : les courbes qui précèdent ont été réalisées avec l'excellent logiciel de géométrie dynamique GEOGEBRA

https://www.geogebra.org/?lang=fr