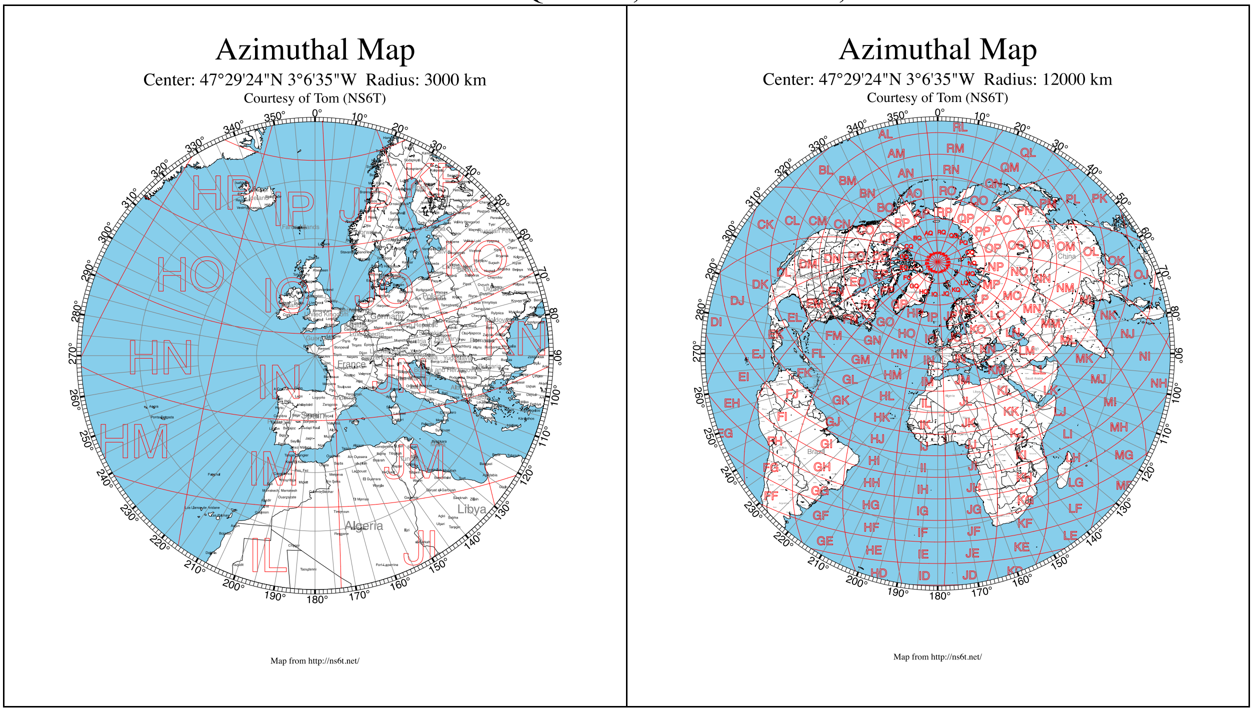
Distance et azimuts entre stations terrestres

Pour un OM, déterminer à quelle distance et quel azimut se trouve une autre station dont il connaît la latitude et la longitude est aujourd'hui devenu simple. Parmi les nombreux outils, on peut en citer deux :

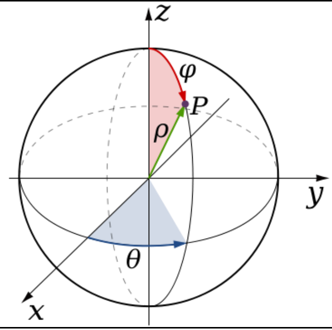
-une « carte azimutale sur mesure » : grâce à NS6T (https://ns6t.net/azimuth/azimuth.html on peut réaliser instantanément en ligne une telle carte centrée là où on veut, à la distance maximale qu'on souhaite. Ci-dessous, 2 réductions de cartes azimutales centrées sur Quiberon, l'une à 3000 km, l'autre à 12000 km de distance maximale :



-l'utilisation du logiciel VOACAP (http://www.voacap.com/p2p/index.html) donne distance et azimut, et trace l'orthodromie correspondante (toutes les cartes suivantes de cet article ont été faites avec VOACAP). Ci-dessous une carte pour la liaison Quiberon-Novosibirsk :

Mais un OM curieux de savoir par quelle « tringlerie mathématique » on détermine distance et azimuts à partir de la trigonométrie élémentaire (celle des lycéens) peut aussi se livrer aux petits calculs qui suivent :

On considère la surface de la Terre comme une sphère de rayon ρ = 6371 km[1].
La position d'un point P est donnée par rapport à un repère orthonormé $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$:
$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ = la longitude du point,
$\varphi = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$ = la colatitude du point,
Les 3 composantes du vecteur $\overrightarrow{0P}$ sont donc :
$\{\rho.sin\varphi.cos\theta, \rho.sin\varphi.sin\theta\ , \rho.cos\varphi\ \}$



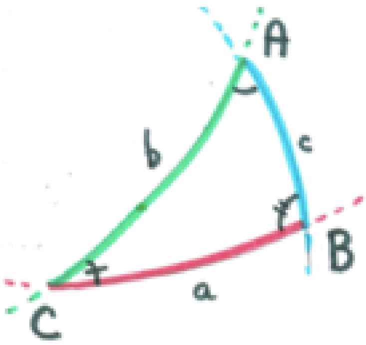
Le calcul du chemin le plus court entre 2 points P1 et P2 peut se faire grâce au produit scalaire suivant :
$\overrightarrow{OP1}.\overrightarrow{OP2} = \rho^2.(sin\varphi_1.sin\varphi_2.cos(\theta_1 - \theta_2) + cos\varphi_1.cos\varphi_2) = \rho^2.\cos(\overrightarrow{OP1}, \overrightarrow{OP2})$
$\Rightarrow \widehat{P1OP}2 = arccos(sin\varphi_1.sin\varphi_2.cos(\theta_1 - \theta_2) + cos\varphi_1.cos\varphi_2)$ (Formule 1)

$\Rightarrow distance\ de\ P1$ à $P2 = \rho.arccos(sin\varphi_1.sin\varphi_2.cos(\theta_1 - \theta_2) + cos\varphi_1.cos\varphi_2)$ (Formule 2)
Ici, les φ sont les colatitudes des points *P1* et *P2*, et les θ sont leurs longitudes.

Quand on manipule les fonctions trigonométriques, et particulièrement celles de trigonométrie sphérique, il faut faire attention au fait que pour connaître la valeur d'un angle, il ne suffit pas de connaître son sinus ou son cosinus : il faut connaître les deux.

Exemple : on cherche la valeur de l'angle dont on sait, d'une part est entre 0 et 360°, d'autre part que son cosinus vaut cos(x) = -0,5.
Le premier réflexe est de prendre l'arcosinus de (-0,5) et de dire que cela donne l'angle x cherché.
Or, arccos (-0,5) = 120°
C'est là une valeur possible, mais il y e a une autre qui est x = 240° puisque cos (240°) = -0,5
En fait, seule la connaissance du sinus permet de distinguer entre les 2 solutions du système « équation, inéquations » suivant :
Cos (x) = -0,5
0° < x < 360°
Puisque :
Si, en outre, sin (x) > 0, alors la seule solution est x = 120°
Sinon, la seule solution est x = 240°
Pour revenir aux calculs d'azimuts et de distance entre 2 stations :

On va utiliser les formules donnant cosinus et sinus de C :
$\frac{sin(c)}{\sin(C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(A)} => sin(C) = \frac{sin(A).sin(c)}{sin(a)}$
$\cos(a) = \cos(b).\cos(c) + \sin(b).\sin(c).\cos(A)$
$\cos(c) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b).\cos(C) =>$
$\cos(C) = [\cos(c) - \cos(a).\cos(b)]/[\sin(a).\sin(b)]$
Si A est au pôle Nord, C au point 1, B au point 2, alors =>
A= long2 – long1
$b = colat1 = 90° - lat1$
$c = colat2 = 90° - lat2$

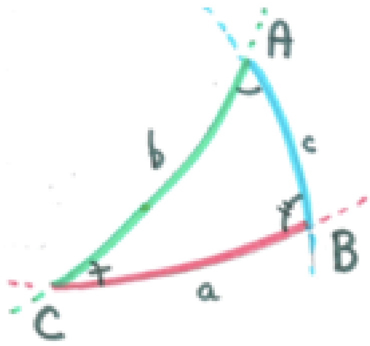


L'utilisation d'un tableur EXCEL permet d'introduire facilement le test de signe des sinus. Ne pas oublier que la « trigo sous EXCEL » se fait en radians et pas en degrés. Ne pas oublier non plus d'arrondir in fine les valeurs de distance et d'azimut trouvées.

Les pages suivantes de ce document donnent 2 illustrations de ce qui précède sous forme d'annexes :
-L'annexe 1 à ce document donne les résultats pour 22 cas différents (un cas par ligne). Ces résultats sont les mêmes que ceux obtenus en utilisant le logiciel « tout fait » VOACAP (seul écart sur les distances, à 0,2% près). A noter que les seules données à fournir (cases bleues) sont les latitudes et longitudes des stations (4 chiffres). Les résultats sont dans les cases jaunes, en fin de tableau.
-L'annexe 2 donne les cartes correspondantes pour les cas n°11 à 20.

[1] Valeur donnée par l'Union géodésique et géophysique internationale (UGGI).

Annexe 1 : utilisation d'EXCEL pour le calcul des azimuts et distance 22 cas)



Dans le tableau Excel (copie d'écran) qui suit, où sont effectués les calculs pour 22 cas, le triangle sphérique est celui-ci-contre (A est au pôle Nord, B et C sont les stations 1 et 2. Par ailleurs, chaque ligne correspond à un cas (un ensemble de 2 stations) avec les précisions suivantes :

-colonnes B à E :
Latitudes et longitudes des 2 stations en °

-colonnes F et G :
Leurs colatitudes en °
(côtés b et c du triangle sphérique « Pôle Nord, station 1, station 2 »)

-colonne H :
La différence entre les longitudes des 2 stations
(angle A du triangle sphérique en °)

-colonne I à M :
Les sinus et cosinus des angles ou arcs b, c, A

-colonne N :
Le cosinus de l'arc a, calculé avec la formule :
$\cos(a) = \cos(\mathrm{b}) . \cos(\mathrm{c}) + \sin(\mathrm{b}) . \sin(\mathrm{c}) . \cos(A)$

-colonne O :
La valeur de l'arc a en °, calculée avec la formule : $\mathrm{a} = (180/\pi) * \mathrm{Arccos}[\cos(a)]$

-colonne P :
La distance entre les stations en km, calculée avec la formule : $\mathrm{distance} = (180/\pi) * 6371 * \mathrm{a}$

-colonne Q :
Le sinus de l'angle C du triangle, calculé avec la formule : $\mathrm{sinC} = \sin[(\pi/180) * \mathrm{A}] * \sin(\mathrm{c})/\sin(\mathrm{a})$

-colonne R :
Le cosinus de l'angle C, calculé avec la formule : $\mathrm{cosC} = [\cos(c) - \cos(a) * \cos(b)]/\sin(a)$

-colonne S :
L'arccosinus en ° du cosinus de l'angle C, calculé avec la formule : $\mathrm{S} = (180/\pi) * \mathrm{Arccos}[\cos(C)]$

-colonne T :
L'angle C en °, calculé avec le test logique suivant : SI (sin C) > 0, alors C = S ; sinon, alors C = -S

-colonne U :
L'angle C arrondi au ° le plus près, calculé avec la formule : C arrondi = partie entière de (0,5 + C)

-colonne V :
L'azimut, calculé avec le test : SI (C arrondi) > 0, alors azimut = (C arrondi) ; sinon, C = (C arrondi) + 360

-colonne W :
La distance arrondie, calculée avec la formule : (distance arrondie) = partie entière de (0,5 + distance)

22 cas de calculs de l'azimut et de la distance d'une station 2 par rapport à une station 1

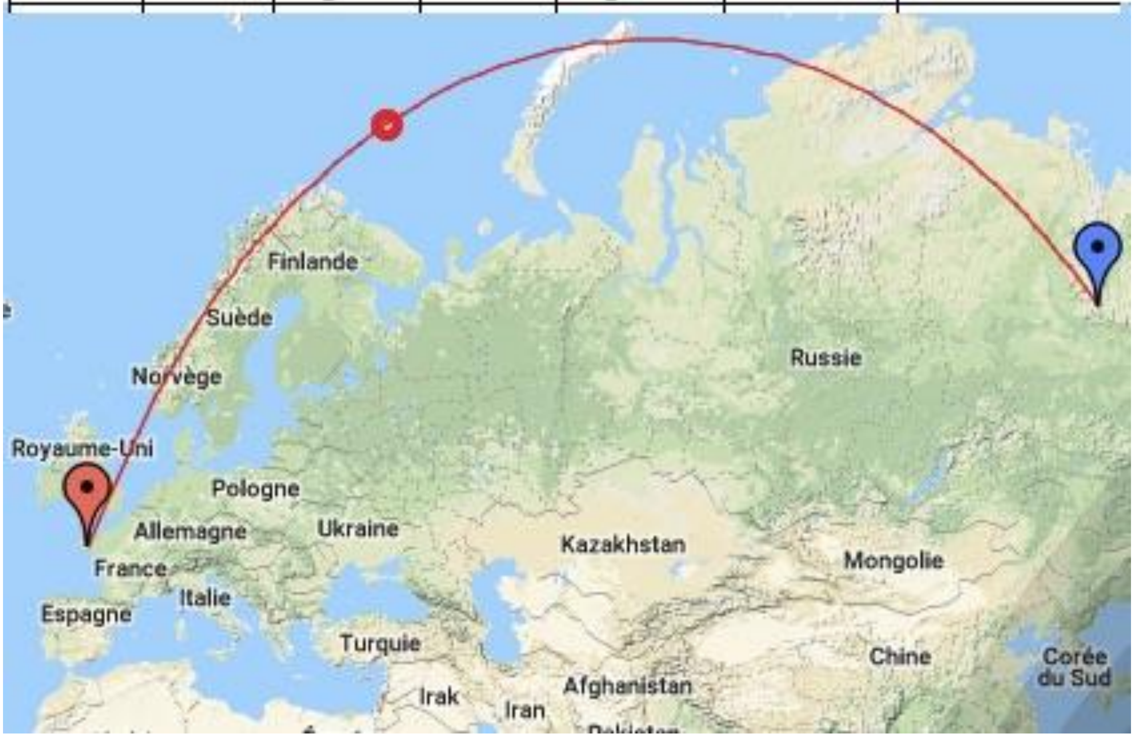
les données (cases bleues) sont les coordonnées (latitude et longitude) des stations 1 et 2

les résultats des calculs sont les cases jaunes

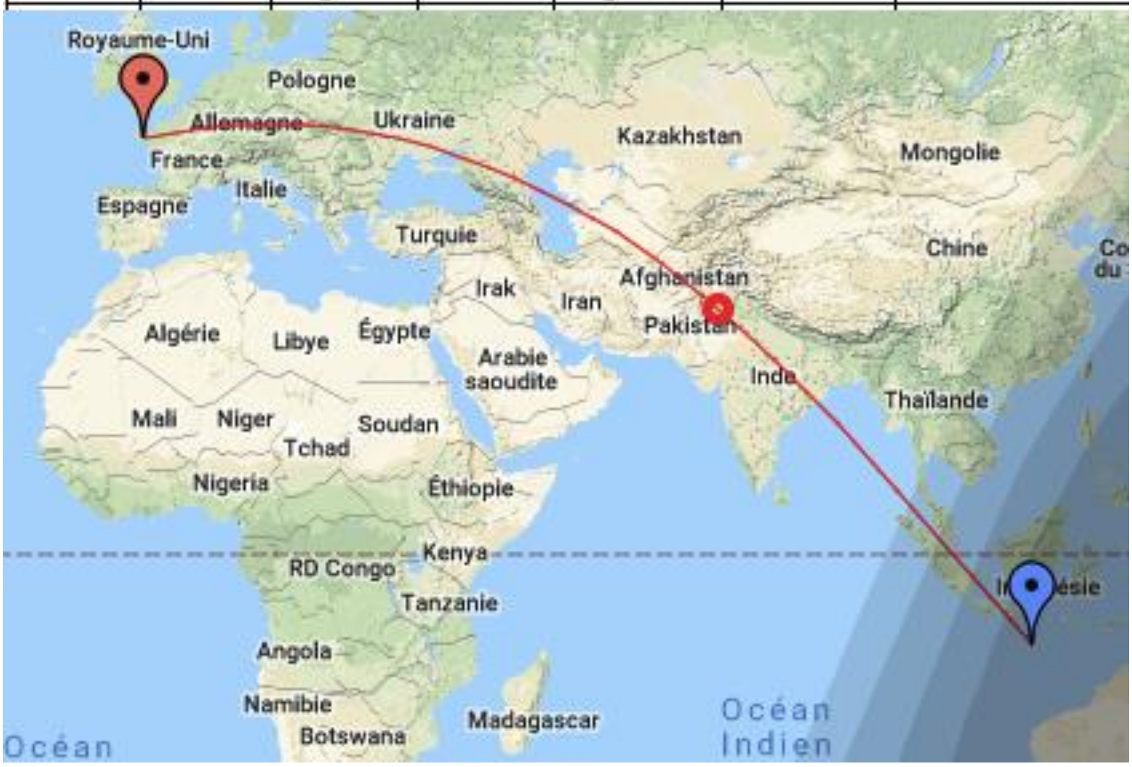
					b	c	A															
cas n°	**lat1 deg**	**long1 deg**	**lat2 deg**	**long2 deg**	**colat1 deg**	**colat2 deg**	**A en deg**	**cosA**	**cosb**	**cosc**	**sinb**	**sinc**	**cosa**	**a en deg**	**distance km**	**sinC**	**cosC**	**arcos(cosC)**	**C**	**C arrondi**	**azimut en °**	**dist arrond**
1	0	0	65	130	90	25	130	-0,643	6E-17	0,9063	1	0,423	-0,272	105,763	11760,28	0,336394	0,94172	19,65736	19,65736	20	20	11760
2	0	0	-12	114	90	102	114	-0,407	6E-17	-0,208	1	0,978	-0,398	113,444	12614,37	0,973984	-0,22662	103,0981	103,0981	103	103	12614
3	0	0	9	82	90	81	82	0,139	6E-17	0,1564	1	0,988	0,1375	82,0991	9129,006	0,98745	0,15793	80,91302	80,91302	81	81	9129
4	0	0	-40	124	90	130	124	-0,559	6E-17	-0,643	1	0,766	-0,428	115,364	12827,89	0,702829	-0,71136	135,3456	135,3456	135	135	12828
5	0	0	-53	94	90	143	94	-0,07	6E-17	-0,799	1	0,602	-0,042	92,406	10275,08	0,600879	-0,79934	143,0671	143,0671	143	143	10275
6	0	0	-53	-94	90	143	-94	-0,07	6E-17	-0,799	1	0,602	-0,042	92,406	10275,08	-0,60088	-0,79934	143,0671	-143,067	-143	217	10275
7	0	0	-40	-124	90	130	-124	-0,559	6E-17	-0,643	1	0,766	-0,428	115,364	12827,89	-0,70283	-0,71136	135,3456	-135,346	-135	225	12828
8	0	0	9	-82	90	81	-82	0,139	6E-17	0,1564	1	0,988	0,1375	82,0991	9129,006	-0,98745	0,15793	80,91302	-80,913	-81	279	9129
9	0	0	-12	-114	90	102	-114	-0,407	6E-17	-0,208	1	0,978	-0,398	113,444	12614,37	-0,97398	-0,22662	103,0981	-103,098	-103	257	12614
10	0	0	65	-130	90	25	-130	-0,643	6E-17	0,9063	1	0,423	-0,272	105,763	11760,28	-0,33639	0,94172	19,65736	-19,6574	-20	340	11760
11	48	-3	65	130	42	25	133	-0,682	0,743	0,9063	0,6691	0,423	0,4807	61,2716	6813,094	0,35247	0,93582	20,63844	20,63844	21	21	6813
12	48	-3	-12	114	42	102	117	-0,454	0,743	-0,208	0,6691	0,978	-0,452	116,85	12993,08	0,976844	0,21395	77,64588	77,64588	78	78	12993
13	48	-3	9	82	42	81	85	0,087	0,743	0,1564	0,6691	0,988	0,1739	79,988	8894,262	0,999145	0,04133	87,63114	87,63114	88	88	8894
14	48	-3	-40	124	42	130	127	-0,602	0,743	-0,643	0,6691	0,766	-0,786	141,829	15770,61	0,989925	-0,14159	98,14	98,14	98	98	15771
15	48	-3	-53	94	42	143	97	-0,122	0,743	-0,799	0,6691	0,602	-0,643	129,984	14453,6	0,779579	-0,6263	128,778	128,778	129	129	14454
16	48	-3	-53	-94	42	143	-91	-0,017	0,743	-0,799	0,6691	0,602	-0,601	126,908	14111,51	-0,75253	-0,65856	131,1901	-131,19	-131	229	14112
17	48	-3	-40	-124	42	130	-121	-0,515	0,743	-0,643	0,6691	0,766	-0,742	137,875	15331,01	-0,97895	-0,20411	101,7774	-101,777	-102	258	15331
18	48	-3	9	-82	42	81	-79	0,191	0,743	0,1564	0,6691	0,988	0,2424	75,9743	8447,953	-0,99933	-0,03646	92,08975	-92,0898	-92	268	8448
19	48	-3	-12	-114	42	102	-111	-0,358	0,743	-0,208	0,6691	0,978	-0,389	112,896	12553,49	-0,99128	0,13176	82,42865	-82,4286	-82	278	12553
20	48	-3	65	-130	42	25	-127	-0,602	0,743	0,9063	0,6691	0,423	0,5033	59,7793	6647,152	-0,3906	0,92056	22,99208	-22,9921	-23	337	6647
21	48	-150	65	130	42	25	280	0,174	0,743	0,9063	0,6691	0,423	0,7226	43,7285	4862,388	-0,6021	0,79842	37,02055	-37,0205	-37	323	4862
22	-80	-170	65	130	170	25	300	0,5	-0,98	0,9063	0,1736	0,423	-0,856	148,853	16551,73	-0,70761	0,7066	45,04078	-45,0408	-45	315	16552

Annexe 2 : cartes des cas n°11 à 20 (à partir de Quiberon)

cas n° 11	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = 65	long2 = 130	azimut = 21	distance = 6813



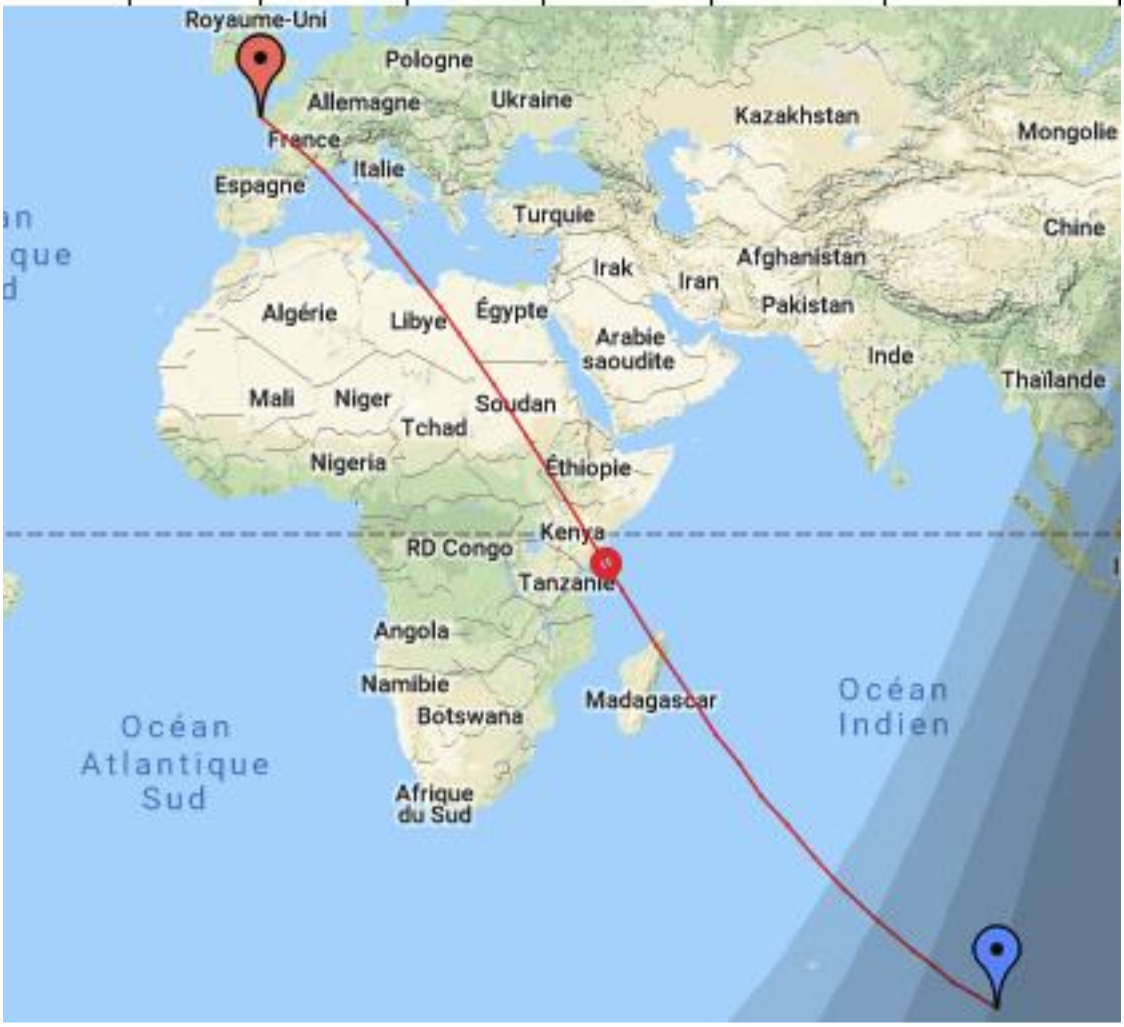
cas n° 12	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -12	long2 = 114	azimut = 78	distance = 12993



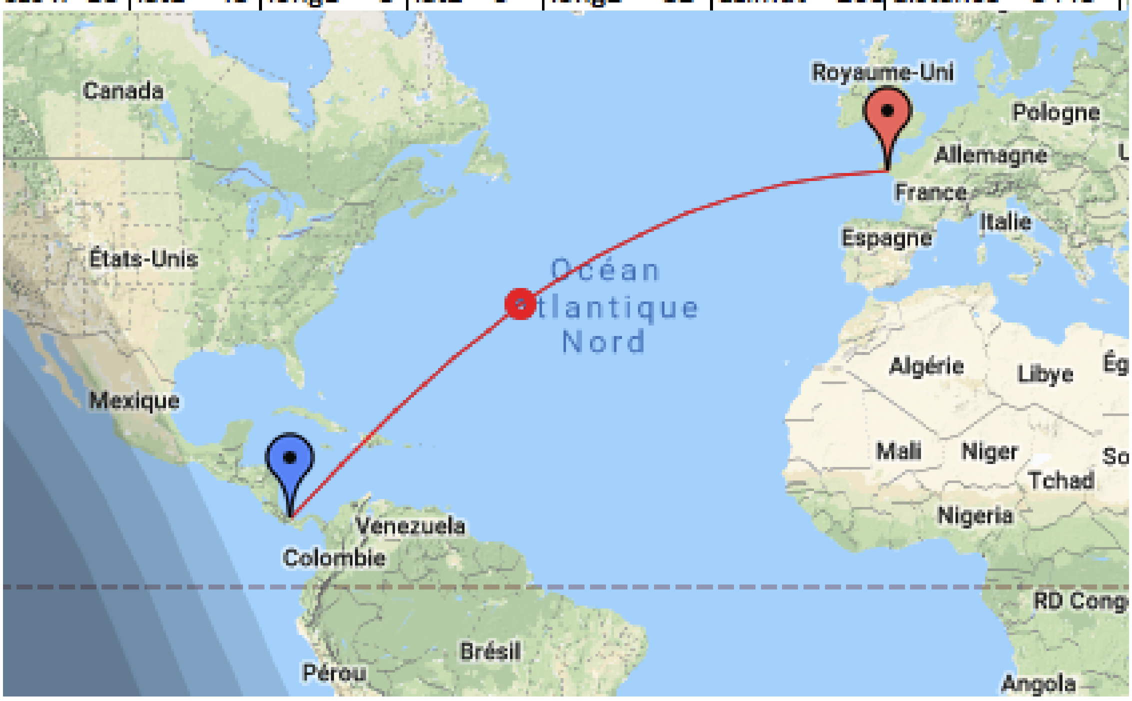
cas n° 13	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = 9	long2 = 82	azimut = 88	distance = 8894

cas n° 14	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -40	long2 = 124	azimut = 98	distance = 15771

cas n° 15	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -53	long2 = 94	azimut = 129	distance = 14454



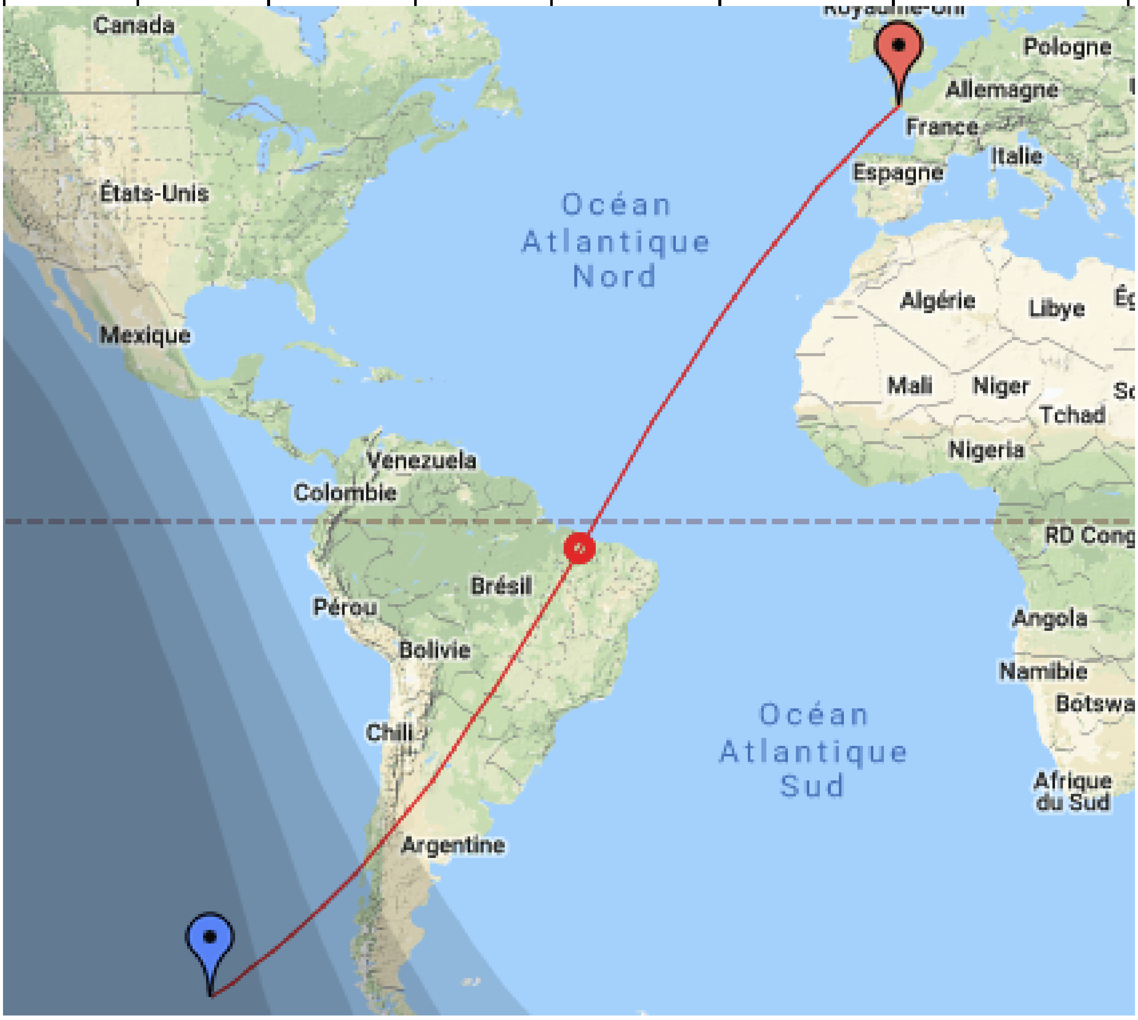
cas n° 18	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = 9	long2 = -82	azimut = 268	distance = 8448



cas n° 17	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -40	long2 = -124	azimut = 258	distance = 15331

cas n° 19	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -12	long2 = -114	azimut = 278	distance = 12553

cas n° 16	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -53	long2 = -94	azimut = 229	distance = 14112



cas n° 19	lat1 = 48	long1 = -3	lat2 = -12	long2 = -114	azimut = 278	distance = 12553