Quelques exercices de calcul avec des nombres complexes

(document écrit par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX, en décembre 2012)

La solution de chacun de ces exercices peut m'être demandée à
f6fqx@orange.fr

Dans tous ces exercices, on adoptera la convention des électriciens qui appelle $\boldsymbol{j}$ la racine de (-1) dont l'argument est $\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}.2\pi)$ et que les mathématiciens appellent i.

1/ <u>exercice n°1 :</u>

On considère la fonction $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ qui, au nombre complexe z d'image M dans le plan complexe, associe le nombre Z complexe d'image P

Sur quelle partie du plan complexe cette fonction et-elle définie ?

2/ <u>exercice n°2 :</u>

On considère la fonction $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ qui, au nombre complexe z d'image M dans le plan complexe, associe le nombre Z complexe d'image P

En posant $z=x+j.y$ (expression où x et y sont réels), calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ En déduire où doit se situer le point M pour que le point P soit sur l'axe réel.

3/ <u>exercice n°3 :</u>

On considère la fonction $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ dans laquelle $z=\rho.e^{j.\theta}=\rho.\cos\theta+j.\sin\theta$ avec $\rho\in\mathbb{R}^{+}$ et $\theta\in\mathbb{R}$

Pour quelles valeurs de ρ et de θ cette fonction est-elle définie ?

4/ <u>exercice n°4 :</u>

On considère la fonction $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ dans laquelle $z=\rho.e^{j.\theta}=\rho.\cos\theta+j.\sin\theta$ avec $\rho\in\mathbb{R}^{+}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ qui, au nombre complexe z d'image M dans le plan complexe, associe le nombre Z complexe d'image P.

On suppose ρ et θ variant de $-\infty$ à $+\infty$; on pose $g(\theta)=f(z)$; montrer que $g(\theta)$ est périodique et en donner la période.

5/ <u>exercice n°5 :</u>

On considère la fonction $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ dans laquelle $z=\rho.e^{j.\theta}=\rho.\cos\theta+j.\sin\theta$ avec $\rho\in\mathbb{R}^{+}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ qui, au nombre complexe z d'image M dans le plan complexe, associe le nombre Z complexe d'image P. On suppose ρ et θ variant de $-\infty$ à $+\infty$; on pose

$g(\theta) = f(z)$; pour 2 valeurs de θ le point P, image de Z est sur l'axe réel ; quelles sont ces 2 valeurs de θ et quelles sont les points P correspondants ?

6/ <u>exercice n°6</u> :
Soient trois nombres complexes z , z_1, z_2 . Soient M, M_1, M_2 leurs images dans le plan complexe. Soient $Z_1 = z - z_1$ et $Z_2 = z - z_2$: montrer que pour que les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MM_2}$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que le nombre complexe $Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ soit un nombre imaginaire pur (c'est-à-dire que son image appartienne à l'axe imaginaire).

7/ <u>exercice n°7</u> :
Soient trois nombres complexes z , z_1, z_2 . Soient M, M_1, M_2 leurs images dans le plan complexe. Soient $Z_1 = z - z_1$ et $Z_2 = z - z_2$; on suppose en outre que le nombre complexe $Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ est un nombre imaginaire pur (c'est-à-dire que son image appartienne à l'axe imaginaire). Si M_1 et M_2 sont fixes, à quelle courbe appartient le point P quand z varie ?

8/ <u>exercice n°8</u> :
Soit la fonction $v(x) = A.e^{j.\beta.x} + B.e^{-j.\beta.x}$ dans laquelle $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elle est périodique ; quelle est sa période ?

9/ <u>exercice n°9</u> :
Soit la fonction $v(x) = A.e^{j.\beta.x} + B.e^{-j.\beta.x}$ dans laquelle $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour 2 valeurs de $x(\text{mod}.2\pi)$ elle prend une valeur réelle. Lesquelles ? Quelles sont les valeurs de $v(x)$ correspondantes ?

10/ <u>exercice n°10</u> :
Soit la fonction $i(x) = A.e^{j.\beta.x} - B.e^{-j.\beta.x}$ dans laquelle $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elle est périodique ; quelle est sa période ?

11/ <u>exercice n°11</u> :
Soit la fonction $i(x) = A.e^{j.\beta.x} - B.e^{-j.\beta.x}$ dans laquelle $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour 2 valeurs de $x(\text{mod}.2\pi)$ elle prend une valeur réelle. Lesquelles ? Quelles sont les valeurs de $v(x)$ correspondantes ?

12/ <u>exercice n°12</u> :
Soit la fonction $v(x) = A.e^{j.\beta.x} + B.e^{-j.\beta.x}$ dans laquelle $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right]$.
Cette Calculer $|v(x)|$, le module de $v(x)$, appelé dans la suite $V(x) = |v(x)|$ (indication : utiliser le fait que $V(x) = |v(x)| = \sqrt{v(x).\overline{v(x)}}$). En déduire que est une fonction périodique, et en donner la période suivant les valeurs de A et B.

13/ <u>exercice n°13</u> ::

Soit la fonction $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ dans laquelle $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\beta}}\right]$.

Calculer $|\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$, le module de $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$, appelé dans la suite $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$ (indication : utiliser le fait que $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})| = \sqrt{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}).\overline{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})}}$). En déduire que est une fonction périodique, et en donner la période suivant les valeurs de A et B.

14/ <u>exercice n°14</u> :

Soit la fonction $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ dans laquelle $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\beta}}\right]$.

Calculer $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$, le module de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, appelé dans la suite $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$ (indication : utiliser le fait que $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})| = \sqrt{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}).\overline{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}}$). Tracer la courbe représentative de $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$ en fonction de $\boldsymbol{x}$

15/ <u>exercice n°15</u> :

Soit la fonction $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ dans laquelle $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\beta}}\right]$.

Calculer $|\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$, le module de $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$, appelé dans la suite $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$ (indication : utiliser le fait que $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})| = \sqrt{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}).\overline{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})}}$). Tracer la courbe représentative de $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$ en fonction de $\boldsymbol{x}$

16/ <u>exercice n°16</u> :

Soient les fonctions $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ dans lesquelles $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\beta}}\right]$.

Soit $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$, le module de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, appelé dans la suite $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$

Soit $|\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$, le module de $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$, appelé dans la suite $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$

Tracer sur le même graphique les courbes représentatives de $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})|$ et de $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|$ en fonction de $\boldsymbol{x}$

17/ <u>exercice n°17</u> :

Soient les fonctions $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}$ dans lesquelles $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\beta}}\right]$.

Soit la fonction $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}}{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\boldsymbol{\beta}.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\boldsymbol{\beta}.x}} = \dfrac{1 + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\boldsymbol{\beta}.x}}{1 - \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\boldsymbol{\beta}.x}} = \dfrac{1 + \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\boldsymbol{\beta}.x}}{1 - \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\boldsymbol{\beta}.x}}$

Montrer que cette fonction est périodique, et en donner la période.

18/ <u>exercice n°18</u> :

Soient les fonctions $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ dans lesquelles $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right]$.

Soit la fonction $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}}{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}} = \dfrac{1 + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}} = \dfrac{1 + \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}$

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles cette fonction prend des valeurs réelles ? Quelles sont alors ces valeurs ?

19/ <u>exercice n°19</u> :

Soient les fonctions $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ dans lesquelles $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right]$.

Soit la fonction $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}}{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}} = \dfrac{1 + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}} = \dfrac{1 + \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}$

Montrer que l’image P de z(x) décrit un cercle dans le plan complexe. Quel en est le centre et quel en est le rayon ?

20/ <u>exercice n°20</u> :

Soient les fonctions $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}$ dans lesquelles $\boldsymbol{A} = 4$, $\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$, $\boldsymbol{x} \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right]$.

Soit la fonction $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}}{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{e}^{j.\beta.x} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{e}^{-j.\beta.x}} = \dfrac{1 + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}} = \dfrac{1 + \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}{1 - \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{e}^{-j.2.\beta.x}}$

Soient P l’image de z(x), A le point d’abscisse 1 sur l’axe réel, B le point d’abscisse (-1) sur le même axe dans le plan complexe.

Soit E le point de l’axe réel d’abscisse $\dfrac{1-\boldsymbol{\rho}}{1+\boldsymbol{\rho}}$ et soit F le point de l’axe réel d’abscisse $\dfrac{1+\boldsymbol{\rho}}{1-\boldsymbol{\rho}}$

Soit M un point variable sur l’axe imaginaire et © le cercle de centre M passant par A et B. Comment doit varier l’ordonnée de M en fonction de x pour que P soit l’intersection de © et du cercle de diamètre EF ? Tracer, sur un même graphique, les figures correspondant à $\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{10}$, $\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{8}$, $\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{6}$.