Quelques aspects mathématiques de la théorie de la relativité

Ce texte est un petit « complément maths » à l'article La radio, mère de la théorie de la relativité

1 _ Relativité restreinte, démonstration des transformations de Poincaré-Lorentz

Soient 2 repères orthonormés en mouvement de translation rectiligne uniforme l'un {Ox, Oy, Oz} (lié au chef de gare dans notre exemple) par rapport et l'autre (lié à l'enfant du train dans notre exemple) {O'x', O'y', O'z'}. Dans un premier temps, on va se ramener à une seule dimension et supposer que :

- les 2 axes Ox et O-x' sont confondus avec la voie ferrée
- les 2 axes Oy et O'y' sont parallèles
- les 2 axes Oz et O'z » sont parallèles

Soit (+v) la vitesse de 0' dans le repère (Ox, Oy, Oz), donc (-v) la vitesse de 0 dans le repère (O'x', O'y', O'z'). L'expérience de Michelson et Morley a montré que la vitesse de la lumière c est identique dans les 2 repères, quelle que soit v, ce qui est contraire aux lois de Galilée-Newton, dites de la mécanique classique. Les inventeurs de la théorie de la relativité restreinte en déduisent que le temps n'est pas indépendant du référentiel dans le quel on le mesure.

On considère par exemple une voie ferrée rectiligne (segment AB) avec plusieurs gares le long de cette voie et un train qui y circule :

- si on considère 2 horloges identiques H et H', la 1ère fixe dans la gare, la 2nde embarquée dans le train
- H étant dans le repère (Ox, Oy, Oz) fixe sur la voie et y mesurant le temps (t)
- H' étant dans le repère (O'x', O'y', O'z') fixe dans le train et y mesurant le temps (t')

Soit un point M d'abscisse x dans le repère (Ox, Oy, Oz) et x' dans le repère (O'x', O'y', O'z'). si la lumière a la même vitesse dans les deux repères, cela signifie que les 2 équations de l'onde

x-ct=0 et x+ct=0 sont valables simultanément dans les 2 repères ou, dit autrement, qu'il existe deux constantes λ et μ elles que $x'+ct'=\lambda .(x+ct)$ et $x'-ct'=\mu .(x-ct)$ pour tout point. D'où les relations

suivantes:
$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2} . x - \frac{\lambda - \mu}{2} . ct$$
 et $ct' = \frac{\lambda + \mu}{2} . ct - \frac{\lambda - \mu}{2} . x$. En posant, pour simplifier, $a = \frac{\lambda + \mu}{2}$

et
$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$
, on obtient les relations suivantes : $x' = a.x - b.ct$ et $ct' = a.ct - b.x$ {équations (1)}

Il ne reste plus qu'à calculer a et b, ce qui peut être fait en trouvant 2 relations entre a et b; or, le point

O' correspond à x'=0 donc se déplace dans le repère (Ox, Oy, Oz) à la vitesse $v=\frac{x}{t}=\frac{b.c}{a}$, ce qui fournit

une première relation. La seconde relation s'obtient en remarquant qu'une longueur unité (donc de longueur $\Delta x = 1$) dans le repère (Ox, Oy, Oz) est vue d'après les équations (1) avec une longueur $\Delta x' = a.1 = a$ dans le repère (O'x', O'y', O'z'). Mais les équations (1) peuvent aussi s'écrire

$$x = \frac{a}{a^2 - b^2} \cdot x' - \frac{b}{a^2 - b^2} \cdot ct'$$
 et $ct = \frac{a}{a^2 - b^2} \cdot ct' - \frac{b}{a^2 - b^2} \cdot x'$ {équations (2)}

Donc, une longueur unité (donc de longueur $\Delta x' = 1$) dans le repère (O'x', O'y', O'z').est vue d'après les équations (2) avec une longueur $\Delta x = \frac{a}{a^2 - b^2} \cdot 1 = \frac{a}{a^2 - b^2}$ dans le repère (Ox, Oy, Oz). Or, le principe de la relativité impose qu'une règle de longueur unité dans un des repères soit vue de la même façon dans l'autre, quel que soit l'ordre des repères, donc que : $\frac{a}{a^2 - b^2} = a$. Donc $a^2 = b^2 + 1$ et, comme $v = \frac{b \cdot c}{a}$, on obtient :

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$
 et $b = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. D'où les équations (1) réécrites

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \cdot (x - v.t)$$
 et $ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \cdot \left(ct - \frac{v}{c}.x\right)$

qui constituent les fameuses formules de transformation de Poincaré-Lorentz

Deux conséquences de ces formules

- 1 On voit que si v est très inférieur à c, les équations (1) se ramènent à x' = (x vt) et ct' = ct qui sont les équations de Galilée-Newton de la mécanique classique.
- 2 Calculons d'abord $\lambda \cdot \mu = a^2 b^2 = 1$.. Donc $x^2 (c.t)^2 = x'^2 (c.t')^2$ qui, généralisé à 3 dimensions, donne $x^2 + y^2 + z^2 (c.t)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 (c.t')^2$, qui est l'invariant relativiste correspondant à l'invariant classique $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

2 _Relativité générale, aspects mathématiques (tenseur et équation d'Einstein)

De 1905 à 1915, Einstein a développé sa théorie de la relativité générale autour de deux idées maîtresses :

- généraliser la théorie de la relativité restreinte qui exprime qu'un phénomène physique doit pouvoir s'exprimer sous la même forme d'un référentiel galiléen à un autre. La généralisation concerne les référentiels soumis cette fois à des forces de gravitation ou à des accélérations.
- remplacer la théorie de l'attraction universelle, due à Newton, par une nouvelle qui soit « plus naturelle » (les forces à distance exercées par le soleil sur les planètes ayant un côté « surnaturel » dérangeant). En bon scientifique, Einstein pensait que ces deux idées devaient pouvoir s'exprimer par quelques équations, outils de base de toute physique : la relativité restreinte n'avait-elle pas été bâtie à partir des transformations de Poincaré-Lorentz (cf. § précédent), elles-mêmes résultant d'une formule encore plus simple

Vitesse de la lumière (dans le vide) = constante (quel que soit le référentiel galiléen) Afin de bien se raccorder à la loi de Newton, Einstein s'inspira de l'équation de Poisson qui relie le laplacien du potentiel gravitationnel Φ à la masse volumique μ par la formule $\Delta\Phi=4\pi G\mu$ (rappelons qu'on appelle « laplacien de la fonction Φ », $\Delta\Phi=div(\overline{grad}\Phi)$).

Après des années de réflexions physiques et mathématiques pénibles (aux dire d'Einstein lui-même), il aboutit à sa fameuse équation qu'on écrit sous sa forme générale de la façon suivante :

$$\left| \boldsymbol{R}_{ij} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}_{ij} . \boldsymbol{R} - \boldsymbol{g}_{ij} . \Lambda = \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{T}_{ij} \right|$$

dont le premier membre, dit tenseur d'Einstein, exprime la déformation de l'espace-temps, et le second membre la présence de masse et d'énergie. Cette équation exprime donc que

la géométrie de l'espace-temps est déterminée par la présence de masse et d'énergie

Dans cette formule, R_{ij} est le tenseur de Ricci, qui représente la moyenne des courbures selon tous les plans orthogonaux à un vecteur donné, g_{ij} est le tenseur métrique, R est la courbure scalaire, Λ est la constante cosmologique, terme introduit à l'origine par Einstein pour qu'un univers statique soit solution de son équation, χ est un facteur dimensionnel, permettant d'exprimer l'équation dans les unités usuelles et de faire correspondre l'équation à la réalité physique, T_{ij} est le tenseur dit énergie-impulsion, qui représente la contribution de toute la matière et de toute l'énergie. Les indices i et j varient de 1 à 4 puisque les tenseurs sont des tenseurs 4x4 d'ordre 2, et qu'on se situe dans l'espace-temps à 4 dimensions.

En fait, d'un point de vue théorique, l'univers statique décrit par cette équation est instable ; et les observations ultérieures de Hubble montrèrent que l'univers était en expansion. La constante cosmologique fut donc abandonnée, mais récemment, des techniques astronomiques ont montré qu'une valeur non nulle de ce paramètre permettrait d'expliquer certaines observations, en particulier en ce qui concerne la fameuse « masse manquante de l'univers »..

Il a été démontré que le tenseur d'Einstein est le seul tenseur pouvant être mathématiquement construit qui possède toutes les propriétés voulues : tenseur d'ordre 2, possèdant des dérivées secondes de la métrique, de dérivée covariante nulle et s'annulant en espace plat (ce qui permet de retrouver la loi de Newton).

La forme tensorielle est en fait une forme condensée (comme l'est l'écriture vectorielle des équations de Maxwell). Pour opérer des calculs numériques à partir de cette forme, il faut donc écrire les 4x4=16 égalités (qui sont des équations différentielles) correspondant à chaque paire d'indices (i,j).

Les tenseurs en question étant symétriques, ces 16 équationss se ramènent à 10 ; en outre, 4 d'entre elles dépendent du choix du référentiel, ce qui laisse donc 6 équations à résoudre. A noter que ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui rend la recherche des solutions très difficile, sauf dans certains cas particuliers (difficulté déjà rencontrée, mais à un niveau moindre, pour les équations de Maxwell dans le cas général).