Champs et potentiels, deux approches de la théorie électromagnétique
(troisième partie : théorie de la relativité et ondes électromagnétiques)

par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

Dans cette troisième partie, nous allons aborder un aspect des ondes électromagnétiques généralement ignoré des radio-amateurs quand ils ne sont pas par ailleurs des spécialistes de la physique. Quand on lit en effet la littérature OM, y compris les très sérieuses publications de l'A.A.R.L. qui ne sont pourtant pas avares de concepts mathématiques avancés comme les nombres complexes et les transformations de Fourier, on ne trouve nulle part mention du fait important que ce sont les ondes électromagnétiques qui ont fait émerger la théorie de la relativité[1] car, sans cette théorie, les ondes restaient contraires aux lois de la mécanique classique. Il y a pourtant motif à fierté que de penser que ce que nous « manipulons couramment » a conduit à remettre en cause les fondements qui étaient ceux de la physique depuis Galilée et Newton.
*Nous allons ici évoquer successivement les origines historiques de la théorie de la relativité, ses 2 postulats de la relativité, les transformations de Lorentz[2], les quadri-vecteurs et les tenseurs[3], le quadri-vecteur potentiel d'univers, le champ électromagnétique (**E,B**) en fonction du quadri-vecteur potentiel d'univers. Enfin nous démontrerons les équations de Maxwell dans le vide[4].*
Bien sûr, il est hors de question de parler de tout ça sans un peu de mathématiques, mais nous ne cèderons pourtant pas à la facilité qui consisterait à faire étalage de concepts trop abstraits ou de calculs à longueur de page. Pour cela, le prix à payer sera d'accepter qu'il soit souvent fait usage de formulations plus imagées que rigoureuses et que les démonstrations soient souvent passées sous silence. L'auteur, dans la mesure de ses modestes moyens, reste évidemment à la disposition du lecteur qui voudrait connaître telle ou telle démonstration, ou telle ou telle formulation plus rigoureuse.

---

1 - les origines historiques de la théorie de la relativité

La relativité est « datée » de 1905, date à laquelle effectivement Albert Einstein en publia la théorie. Néanmoins, déjà trois quarts de siècles plus tôt, des savants comme Michael Faraday faisaient des découvertes qui allaient lui ouvrir la voie. C'est ainsi que la fameuse « loi de Faraday » qui dit grosso modo qu'un champ magnétique variable avec le temps « équivaut » à un champ électrique pose la question du repère dans lequel on observe ce phénomène : prenons par exemple une charge électrique en mouvement uniforme dans un champ magnétique uniforme par rapport à un repère donné ; un premier observateur, au repos dans ce repère donné, verra une charge en mouvement dans un champ magnétique (donc une force agissant sur la charge), mais un deuxième observateur, lui dans un repère lié à la charge et en mouvement de translation à vitesse constante par rapport au premier, verra une charge

---

[1] Dans cette article, la théorie de la relativité dont nous parlerons sera plus exactement celle appelée en France « relativité restreinte » et en Allemagne « Speziell-Relativität » (ce qui est, à mon avis, une meilleure désignation) ; cette théorie, proposée en 1905 par Einstein, traite de la comparaison des résultats obtenus par deux observateurs d'un phénomène physique, observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre ; une autre théorie, celle dite de la « relativité générale » que le même Einstein proposa en 1917, traite, entre autres, du cas où le mouvement n'est pas uniforme : nous n'en parlerons pas ici.
[2] Hendrik Anton Lorentz (1853-1928), néerlandais, à ne pas confondre avec le danois Ludwig Lorenz (1829-1891), l'inventeur « des potentiels retardés » dont il a été question dans la seconde partie de cet article.
[3] Que les lecteurs non matheux se rassurent, nous ne nous livrerons à aucun calcul tensoriel, nous contentant de dire ce qu'est un tenseur et à quoi ça sert ; un lecteur familiarisé avec les vecteurs ne devrait pas avoir de peine à suivre les raisonnements.
[4] La généralisation des équations de Maxwell à la matière se fait ensuite en introduisant la polarisation des diélectriques (sous forme de charges équivalentes et de courants de polarisation) et l'intensité d'aimantation des substances magnétiques (sous forme de courants fictifs équivalents) ; nous ne présenterons pas cette généralisation dans ce document.

immobile dans un champ électrique[5] ; or, la physique classique, celle de Galilée et de Newton, dit que « le même phénomène doit être décrit de la même façon » dans deux repères différents quand ces repères sont en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.
Cependant, les vrais incompatibilités entre lois de l'électromagnétisme apparurent vraiment avec l'introduction de notions sans sens physique au regard des lois de la physique d'alors : le courant de déplacement et les potentiels retardés (cf. deuxième partie de cet article). Enfin, quand l'existence des ondes électromagnétiques « voyageant » à la vitesse de la lumière fut avérée, se posa la vraie question : la vitesse de la lumière par rapport à quoi ? Et on imagina un repère absolu, qu'on baptisa du joli nom d'éther et on le supposa « attaché » dans l'univers à ce qu'il pouvait y avoir de plus fixe, les étoiles. Notre planète, la Terre, se déplaçant dans cet éther, on devait donc observer des vitesses de la lumière différentes suivant qu'elle circulait dans le sens du déplacement de la Terre par rapport à l'éther ou dans le sens contraire. L'expérience la plus célèbre de ce type fut conduite en 1887 par Michelson et Morley et conduisit à quelque chose qui heurtait alors le bon sens : la lumière (donc les ondes électromagnétiques) se propagent à la même vitesse quel que soit l'observateur, qu'il soit lui-même en mouvement ou non.
C'est un peu comme si, sur une autoroute, deux observateurs, l'un (A) au repos sur le bas-côté, l'autre (B) roulant à 120 km/h, observaient le même signal lumineux émis par (A) juste au moment où (B) passe à sa hauteur. Les lois de la physique galiléenne diraient que (B) doit voir un signal allant à 120km/h de moins que le signal vu par (A). Or, en fait, il n'en est rien, (A) et (B) voient tous les deux un signal allant à la même vitesse…
Le paradoxe était posé : d'un côté, les lois de la mécanique galiléenne, incontestables parce qu'expliquant des phénomènes aussi complexes que le mouvement des planètes et surtout vérifiées par « tout ce qui bouge » dans la vie courante, de l'autre les équations de Maxwell incontestables parce qu'expliquant parfaitement tous les phénomènes électromagnétiques, et au milieu ces ondes dont la vitesse est indépendante du mouvement de qui les observe.

2 - les 2 postulats de la relativité et la transformation de Lorentz

En 1905, Einstein propose de lever ce paradoxe en présentant une théorie révolutionnaire, dite de la relativité, qui repose sur deux postulats :

- la description des phénomènes physique est indépendante du repère de coordonnées dans le quel on les observe
- la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs et est indépendante du mouvement de la source qui l'a émise.

Quelques calculs que nous ne ferons pas ici montrent que ces postulats ont pour conséquence que nos deux observateurs autoroutiers précités, en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, <u>ne voient pas les mêmes distances et ne vivent pas le même temps</u>. Plus précisément :

- les distances vues par (B) sont plus courtes que celles vues par (A)[6]
- le temps vécu par (B) est dilaté par rapport à celui vu par (A)[7]

---

[5] On se souvient que la force qui agit sur la charge e animée de la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au champ $\vec{\mathbf{B}}$ est égale à $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{e}.\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$; le second observateur, au repos dans son repère lié à la charge, analysera donc le champ auquel e est soumise comme un champ électrique $\vec{\mathbf{E'}} = -\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$.

[6] uniquement dans le sens du mouvement, bien sûr.

[7] Le film « La planète des singes » a beaucoup contribué à vulgariser ce résultat, vérifié en permanence dans l'observation des particules cosmiques à grande vitesse : leur vie (vécue par elles) serait beaucoup trop courte pour qu'on puisse les observer mais, heureusement, pour nous, elles vivent longtemps… Ce paradoxe du temps propre à chaque observateur a une conséquence inattendue, qui est que deux évènements peuvent être simultanés pour un des observateurs et pas pour l'autre : les nouvelles policières qui s'en sont inspiré n'ont pas eu le succès escompté… dommage !

C'est à Hendrik Anton Lorentz qu'on doit l'établissement des formules permettant de relier les temps et les distances propres à chacun de nos deux observateurs. C'est pourquoi on parle de transformation de Lorentz. Rappelons-les :

Supposons que l'autoroute soit l'axe Ox, qu'au temps t pour (A) celui-ci voit (B) à la distance x ; supposons que (B) voit alors (A) à une distance x' et que pour lui le temps écoulé soit t' ; supposons enfin que la vitesse relative d'éloignement soit v, et que la vitesse de la lumière soit c :

on « passe » alors du repère de (A) à celui de (B) par les formules suivantes :	on « passe » du repère de (B) à celui de (A) par les formules suivantes :
$\mathbf{t' = \gamma.(t - \frac{v}{c^2}.x)}$	$\mathbf{t = \gamma.(t' + \frac{v}{c^2}.x')}$
$\mathbf{x' = \gamma.(x - v.t)}$	$\mathbf{x = \gamma.(x' + v.t')}$
$\mathbf{\gamma = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}}$	$\mathbf{\gamma = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}}$

On constate bien que quand la vitesse v relative de (A) et (B) est petite devant celle c de la lumière, on retrouve les formules habituelles de passage d'un repère à l'autre en physique classique :

on « passe » alors du repère de (A) à celui de (B) par les formules suivantes :	on « passe » du repère de (B) à celui de (A) par les formules suivantes :
$\mathbf{t' = t}$	$\mathbf{t = t'}$
$\mathbf{x' = x - v.t}$	$\mathbf{x = x' + v.t}$
$\mathbf{\gamma = 1}$	$\mathbf{\gamma = 1}$

En restant dans notre exemple, on dit que la physique classique se situe dans un univers à une seule dimension (l'axe Ox, notre autoroute), alors que la physique relativiste se situe dans un univers à 2 dimensions (l'axe Ox, le temps). Mais attention, cette façon de dire est trompeuse car la « dimension temps » n'intervient pas de la même façon que la « dimension distance » : en effet, les équations des fronts d'onde de lumière dans les deux repères sont :
$\mathbf{x^2 - c^2.t^2 = 0}$ et $\mathbf{x'^2 - c^2.t'^2 = 0}$, et on a donc $\mathbf{x'^2 - c^2.t'^2 = x^2 - c^2.t^2}$, ce qu'on peut aussi exprimer en disant que, dans cet univers à deux dimensions dont une correspond au temps, chaque événement a deux coordonnées $\mathbf{x_1=x}$ et $\mathbf{x_2=i.c.t}$ et que la transformation de Lorentz conserve la longueur du vecteur de coordonnées ($\mathbf{x_1, x_2}$), dont le carré vaut :
$\mathbf{s^2 = x_1^2 + x_2^2 = x^2 + (i.c.t)^2 = x^2 - c^2.t^2}$

3 - les transformations de Lorentz, les quadri-vecteurs et les tenseurs

Si nous passons maintenant du cas d'une voiture sur une autoroute à celui d'un vaisseau spatial, notre repère « classique » n'aura plus une mais 3 dimensions (x, y, z) ; en physique relativiste, nous passerons à un univers à 4 dimensions dont la 4ème figure le temps, et nous appellerons transformations de Lorentz, celles qui permettent, en passant d'un repère à un autre, de conserver la longueur du vecteur de coordonnées ($\mathbf{x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=i.c.t}$), de carré. Pour ne pas confondre ces vecteurs à 4 dimensions avec les vecteurs habituels, on les baptise **« quadri-vecteurs »** ou, mieux encore, **« quadri-vecteurs d'univers »** puisqu'ils « décrivent » l'univers relativiste dont la 4ème dimension est « imaginaire » (au sens des nombres imaginaires) et mesure le temps.

Les transformations de Lorentz seront donc celles qui conserveront la longueur des modules de ces quadri-vecteurs quand on passera d'un repère à un autre. On imagine bien que les formules correspondantes sont beaucoup plus compliquées que celles que nous avons vues dans le « cas de l'autoroute » (pourtant déjà pas simple). Nous ne rentrerons pas dans les détails, mais dirons simplement que chaque coordonnée du repère (B) est alors une combinaison linéaire des 4 coordonnées du repère (A) et vice-versa ; on a donc 4x4 =16 « coefficients de passage » dans un sens et 16 dans l'autre, les tableaux de ces coefficients étant appelés des tenseurs[8]. **Quadri-vecteurs et tenseurs sont omniprésents dans l'étude de l'électromagnétisme relativiste.**

Attardons-nous donc quelques instants sur ces fameux tenseurs, non pour en développer la théorie, mais pour en bien saisir la nature et l'utilité. Pourquoi le nom « tenseur » d'abord ? Parce[9] qu'ils sont « apparus » en premier lieu dans l'étude de la résistance des matériaux pour exprimer les tensions intérieures dans la matière soumise à des efforts : il est alors apparu nécessaire d'élargir le concept de « vecteur » qui était insuffisant à décrire les phénomènes observés ; et puis on s'est aperçu que pratiquement toutes les lois physiques en milieu continu, même quand ce milieu est anisotrope, s'exprimaient plus simplement avec des tenseurs, en particulier les lois de l'électromagnétisme qui nous intéressent ici. Un des plus grands mérites des tenseurs est de permettre de s'affranchir du repère dans lequel on se trouve, et donc de rendre le discours de portée beaucoup plus générale.

S'il ne fallait retenir que quelques points fondamentaux à propos des tenseurs, ce seraient les suivants :
1 – la notion de tenseur est une généralisation de la notion de vecteur
2 – par exemple, un vecteur X dans un espace à 3 dimensions peut être regardé comme une suite des 3 nombres (x_1, x_2, x_3) qui sont ses coordonnées ; un tenseur T d'ordre 2 dans ce même espace à 3 dimensions sera un tableau de 3^2=9 chiffres ; le vecteur X peut donc s'écrire symboliquement (x_k ; k=1, 2, 3) et le tenseur T s'écrire (x_{kj} ; k=1, 2, 3 ; j=1, 2, 3) ; quand il n'y a aucune ambiguïté possible, on notera le tenseur simplement (x_{kj})
3 – en voit qu'un vecteur est en fait un tenseur d'ordre 1 puisque x n'a qu'un seul indice, et qu'un tenseur d'ordre 7 (par exemple) dans l'espace à 3 dimensions serait un tableau de 3^7=2187 chiffres… Que le lecteur se rassure, nous en resterons aux tenseurs d'ordre 2 !
4 – il existe tout un corps de règles de calcul sur les tenseurs comme il en existe sur les vecteurs (somme, produits, etc.), mais nous ne les évoquerons pas ici
5 – en électromagnétisme relativiste, l'espace dans lequel on se situe n'est pas l'espace habituel à 3 dimensions, mais un espace à 4 dimensions (les 3 de l'espace habituel auxquelles on ajoute une quatrième représentative du temps) ; les vecteurs X de cet espace ont donc 4 composantes (x_1, x_2, x_3, x_4) et les tenseurs d'ordre 2 de cet espace ont donc 4^2=16 éléments qu'on notera (x_{kj} ; k=1, 2, 3, 4 ; j=1, 2, 3, 4) ; ces tenseurs se représenteront facilement par des tableaux de 4 lignes et de 4 colonnes ; en outre, comme on le verra, ces tenseurs auront certaines propriétés de symétrie qui les rendront bien plus simples…

[8] dit autrement, on passe de (A) à (B) par des formules du type

$$\mathbf{x'_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + a_{14}.x_4}$$
$$\mathbf{x'_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + a_{24}.x_4}$$
$$\mathbf{x'_3 = a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + a_{34}.x_4}$$
$$\mathbf{x'_4 = a_{41}.x_1 + a_{42}.x_2 + a_{43}.x_3 + a_{44}.x_4}$$

et on appelle tenseur T_{mn} le tableau des 16 coefficients a_{mn}

[9] Cette explication est celle de l'auteur, mais rien ne garantit qu'elle soit la bonne…

Ouf ! Après cette longue promenade en univers relativiste, voyons en quoi ceci peut avoir un rapport avec l'électromagnétisme et les équations de Maxwell, et repartons des propriétés des champs électrique et magnétique statiques dans le vide.

4 - Propriétés des champs électrique et magnétique statiques dans le vide

Ce paragraphe est un rappel rapide de ce que nous avons vu dans la première partie de cet article (nous ne rappellerons pas la signification de tous les symboles pour ne pas alourdir) :

électrostatique	**magnétostatique**
$\vec{D} = \varepsilon_0 . \vec{E}$ $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0$ $div(\vec{D}) = 0$ avec la condition aux limites à l'infini $\vec{D} = \vec{E} = 0$	$\vec{B} = \mu_0 . \vec{H}$ $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$ $div(\vec{B}) = 0$ avec la condition aux limites à l'infini $\vec{H} = \vec{B} = 0$
Soit, en fonction du potentiel scalaire V $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$ $\Delta(V) = -c^2 . \mu_0 . \rho = -\frac{1}{\varepsilon_0} . \rho$ avec la condition aux limites V=0 à l'infini	Soit, en fonction du potentiel vecteur $\vec{A}$ $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$ $\vec{\Delta}(\vec{A}) = -\mu_0 . \vec{j}$ avec $div(\vec{A}) = 0$, et à l'infini $\vec{A} = 0$
Propriétés extensives $V = \frac{\mu_0 . c^2}{4\pi} . \iiint \frac{\rho . d\Omega}{r} = \frac{\mu_0 . c^2}{4\pi} . \sum \frac{e}{r} = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon_0} . idem$ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$	Propriétés extensives $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} . \iiint \frac{\vec{j} . d\Omega}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} . \sum \frac{i . \vec{dl}}{r}$ $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

5 – Divergence d'univers d'un quadri-vecteur d'univers (définition)

On a vu plus haut qu'un quadri-vecteur d'univers avait 4 composantes dont les 3 premières correspondent à celles d'un vecteur à 3 dimensions « habituel » $\vec{R}(X, Y, Z)$ et la 4ème au temps **T** ; on écrira donc ce quadri-vecteur sous la forme condensée $(\vec{R}, T)$. Par analogie avec le cas à 3 dimensions, on appellera divergence d'univers du quadri-vecteur d'univers le scalaire $Div_{univers}(\vec{R}, T) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{i.c.\partial T}{i.c.\partial t} = div(\vec{R}) + \frac{\partial T}{\partial t}$

6 – Quadri-vecteur d'Alembertien d'un quadri-vecteur d'univers et quadri-vecteur densité de courant d'univers (définitions)

De la même façon, on appellera d'Alembertien d'univers du quadri-vecteur d'univers $(\vec{R}, T)$ le quadri-vecteur noté $\square(\vec{R}, T)$ ayant pour composantes d'espace et de temps :

$$\square(\vec{R}) = \vec{\Delta}(\vec{R}) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial t^2} \text{ et } \square(T) = \Delta(T) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$ [10]

Dans l'espace « ordinaire » à 3 dimensions, on sait qu'un champ de vecteurs est complètement défini si on connaît sa divergence et son rotationnel (ou sa divergence et son laplacien) avec les conditions aux limites. On démontre que dans l'univers à 4 dimensions (espace-temps), il en est de même avec d'Alembertien, divergence et conditions aux limites.

On démontre également, à partir de la transformation de Lorentz et en postulant l'invariance de la charge électrique, que le couple $(\vec{j},\rho)$ constitue un quadrivecteur d'univers que l'on appellera « quadri-vecteur densité de courant d'univers ».

7 – Le quadri-vecteur potentiel d'univers dans le vide et sa divergence d'univers (condition de Lorentz)

Au § 4 ci-dessus, on a vu que les potentiels vecteur et scalaire étaient reliés aux densités de courant et de charge par $\vec{\Delta}(\vec{A}) = -\mu_0.\vec{j}$ et $\Delta(\frac{V}{c^2}) = -\mu_0.\rho$

La relativité permet de regrouper ces propriétés en une seule en appelant quadri-vecteur potentiel d'univers dans le vide le quadri-vecteur $(\vec{A}, V/c^2)$.

On a alors $\square(\vec{A}, V/c^2) = -\mu_0.(\vec{j},\rho)$, ce qui équivaut aux deux formules suivantes :

$\vec{\Delta}(\vec{A}) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0.\vec{j}$ et $\Delta(V) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -c^2.\mu_0.\rho = -\frac{1}{\varepsilon_0}.\rho$. On retrouve bien les formules du régime permanent quand **A** et V ne varient pas avec le temps. Mais le quadri-vecteur potentiel d'univers n'est défini que si on connaît aussi sa divergence, condition dite condition de Lorentz. On a alors, d'après ce qu'on a dit au §5 ci-dessus :

$$0 = \mathrm{Div}_{univers}(\vec{A}, \frac{V}{c^2}) = \mathrm{div}(\vec{A}) + \frac{1}{c^2}.\frac{\partial V}{\partial t} \text{ c'est-à-dire } \mathrm{div}(\vec{A}) = -\frac{1}{c^2}.\frac{\partial V}{\partial t}$$

8 – Expression et propriétés du champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ dans le vide en fonction du quadri-vecteur potentiel d'univers $(\vec{A}, V/c^2)$

Au § 4 ci-dessus, on a vu que les champs $(\vec{E},\vec{B})$ étaient reliés aux potentiels scalaire et vecteur par les relations $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ et $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})$, ce qui, par projection sur les 3 axes de l'espace habituel à 3 dimensions, donne les 6 égalités suivantes :

---

[10] on rappelle que le laplacien d'une fonction scalaire f(x, y, z) est le scalaire $\Delta[f] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ et que le laplacien d'une fonction vectorielle $\vec{V}(X,Y,Z)$ est un vecteur dont chaque composante est le laplacien « scalaire » d'une composante de la fonction, i.e.

$$\vec{\Delta}[\vec{V}] = (\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2})$$

$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x}$ $E_y = -\frac{\delta V}{\delta y}$ $E_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$	$B_x = \frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z}$ $B_y = \frac{\delta A_x}{\delta z} - \frac{\delta A_z}{\delta x}$ $B_z = \frac{\delta A_y}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta y}$

Nous allons donner une forme relativiste à ces égalités en remarquant que les 6 valeurs $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ sont toutes des dérivées partielles, ou des combinaisons linéaires de dérivées partielles des composantes du quadri-vecteur potentiel d'univers.
Dit autrement, il est donc possible de considérer que les 6 valeurs précitées sont, à un coefficient (i/c) près en ce qui concerne les E, les éléments du tenseur suivant :

$$B_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & 0 & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -(i/c).E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -(i/c).E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -(i/c).E_z \\ (i/c).E_x & (i/c).E_y & (i/c).E_z & 0 \end{vmatrix}$$

tenseur dans lequel les éléments sont calculés par les formules suivantes à partir des composantes du quadri-vecteur potentiel d'univers :

$$B_{\mu\nu} = \frac{\delta A_\nu}{\delta x_\mu} - \frac{\delta A_\mu}{\delta x_\nu} \text{ si } \nu \neq \mu \text{ et } \vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})\ B_{\mu\mu} = 0 \text{ et } B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$$

On retrouve bien, sous forme vectorielle :

en projection sur Ox : $\frac{i}{c}.E_x = -\frac{\delta A_4}{\delta x_1} + \frac{\delta A_1}{\delta x_4} = -\frac{i}{c}.\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta A_x}{i.c.\delta t}$ c'est-à-dire $E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta t}$

donc globalement : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\delta \vec{A}}{\delta t}$ et $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

En régime continu, on retrouve bien les expressions classiques car A ne dépend pas du temps.

9 – Démonstration des équations de Maxwell dans le vide à partir de ce qui précède

Il suffit d'éliminer, entre les formules précédentes, les potentiels scalaire et vecteur en se souvenant des règles de calcul de l'analyse vectorielle.
Nous calculons donc successivement $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$, $div(\vec{E})$, $\overrightarrow{rot}(\vec{B})$ et $div(\vec{B})$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{grad}(V)\right] - \frac{\delta\left[\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right]}{\delta t} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta x}$$

$$div(\vec{E}) = -div\left[\overrightarrow{grad}(V)\right] - \frac{\delta}{\delta t}\left[div(\vec{A})\right] = -\Delta(V) + \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2.\mu_0.\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}.\rho$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right] = \overrightarrow{grad}\left[div(\vec{A})\right] - \vec{\Delta}(\vec{A}) = -\frac{1}{c^2}.\frac{\delta}{\delta t}\left[\overrightarrow{grad}(V)\right] - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j}$$

$$= \frac{1}{c^2}.\frac{\delta\vec{E}}{\delta t} + \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \mu_0.\left[\vec{j} + \frac{1}{\mu_{0.}c^2}.\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}\right] = \mu_0.\left[\vec{j} + \varepsilon_0.\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}\right]$$

$$div(\vec{B}) = div\left[\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right] = 0$$

c.q.f.d.

10 – Conclusion

Même si les notions précédentes sont un peu abstraites du fait de la mise sous forme tensorielle, elles traduisent plusieurs faits :

- le cadre adapté à l'étude de l'électromagnétisme est celui de la relativité et non de la physique classique, dans laquelle il est nécessaire de recourir à des artifices pour expliquer les phénomènes observés (courant de déplacement, potentiels retardés).
- le champ magnétique et le champ électrique ne sont pas des concepts distincts, mais des aspects différents d'un concept plus global, le champ électromagnétique ; ils ne sont séparables que dans le cas statique.
- La force de Coulomb et la force de Laplace dont nous étions partis au début de la première partie de cet article, et dont les notions de champ électrique et de champ magnétique sont d'ailleurs issues, sont elles-mêmes deux aspects d'une même force.

<u>Bibliographie :</u>

- cours de physique (relativité, électromagnétisme) de Monsieur Jean Vignal à l'Ecole Polytechnique en 1964-1965.