Champs et potentiels, deux approches de la théorie électromagnétique
(<u>seconde partie</u> : phénomènes dépendants du temps)

par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

Dans cette seconde partie, nous allons voir comment on passe du régime continu, c'est-à-dire de l'étude des phénomènes statiques (charges constantes et immobiles, courants continus)au régime variable, c'est-à-dire à l'étude des phénomènes variant avec le temps.
On verra, en particulier, comment les concepts de champs et de potentiels examinés dans la première partie évoluent quand on passe au régime variable.

---

1 - Comment les relations entre grandeurs (charges, courants, champs) sont-elles modifiées, quand on passe du régime continu au régime variable ?

Rappelons d'abord les équations de Maxwell telles qu'elles s'écrivent dans le régime continu et dans le régime variable et observons les modifications introduites :

	Régime continu	**Régime variable**	**Modifications**
Eq. 1	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{0}}$	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}$	Il apparaît un terme nouveau $-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}$
Eq. 2	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{j}}$	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{t}}$	Il apparaît un terme nouveau $+\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\delta \mathbf{t}}$
Eq. 3	$\mathbf{div}\vec{\mathbf{D}} = \rho$	$\mathbf{div}\vec{\mathbf{D}} = \rho$	Sans modification
Eq. 4	$\mathbf{div}\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$	$\mathbf{div}\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$	Sans modification

En outre :

- l'équation de continuité est vérifiée dans les deux cas $\mathbf{div}(\mathbf{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}}$
- de plus, si nous nous plaçons hors matière diélectrique ou magnétique, on a les relations de proportionnalité $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 . \vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 . \vec{\mathbf{H}}$

La vraie justification des équations de Maxwell est relativiste (cf. troisième partie de cet article), mais elles sont historiquement bien antérieure à la théorie de la relativité ;

Les modifications précitées furent introduites comme suit :
<u>- la première modification introduite (cf. Eq. 1) est issue de la loi de l'induction</u> :
cette loi conduit à ajouter, au champ électrostatique $\vec{\mathbf{E}}_1$ (irrotationnel), un nouveau champ $\vec{\mathbf{E}}_2$ qui est la dérivée par rapport au temps du potentiel vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ du vecteur induction $\vec{\mathbf{B}}$; on a donc $\vec{\mathbf{E}}_2 = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}}$ et par suite $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{E}}_2) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}[\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{A}})] = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}$.
- <u>la seconde modification introduite (cf. Eq. 2) est due à Maxwell lui-même en 1868</u> : il ajouta au courant réel $\vec{\mathbf{j}}$ un courant supplémentaire $\vec{\mathbf{j}}'$ (dit « courant de déplacement ») tel que $\vec{\mathbf{j}}' = -\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{t}}$; cela permettait de conserver au théorème d'Ampère un sens en régime variable car

$\vec{j}+\vec{j}'$ est alors à flux conservatif ; en effet $\mathbf{div(\vec{j}+\vec{j}') = div(\vec{j}) + \dfrac{\partial}{\partial t}[div(\vec{D})] = div(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$.
Ce nouveau courant n'avait toutefois aucune justification physique dans le vide, puisqu'il n'y existe aucune charge.

2 – Quelques remarques importantes sur les équations de Maxwell :

A noter que les 4 équations de Maxwell se ramènent en fait à 2 seulement car les équations 3 et 4 sont des conséquences des équations 1 et 2, pourvu qu'elles soient satisfaites à l'instant origine ; c'est pourquoi on nomme celles-ci les équations principales de Maxwell[1].
L'intérêt des équations de Maxwell est que dans un milieu non conducteur, homogène et sans hystérésis magnétique ou électrique (le vide par exemple), elles permettent de séparer les deux vecteurs E et B puisqu'on arrive alors aux équations différentielles classiques suivantes[2] :

$$\vec{\Box}(\vec{E}) = \vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\rho)$$

$$\vec{\Box}(\vec{B}) = \vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

formules dans lesquelles $\vec{\Box}$ et $\vec{\Box}$ désignent respectivement le **Laplacien** et le **D'Alembertien** du vecteur concerné ; ces équations différentielles sont, depuis Pierre-Simon Laplace(1749-1827) et Siméon-Denis Poisson (1781-1840), bien connues et correspondent à des phénomènes de propagation de type « ondes ».

Nous ne reprendrons pas ici toutes les conséquences de ces équations en termes de propagation (en particulier ondes planes, non-propagation des composantes longitudinales des champs, propagation conjointe de E et de B, polarisation, énergie transportée, vecteur de Poynting, etc.).

En revanche, nous allons évoquer un autre concept pré-relativiste, celui des potentiels retardés, concept tout aussi arbitraire que celui du courant de déplacement de Maxwell et qui permettait d'arriver aux mêmes équations, mais par la voie des potentiels, cette fois.

3 - Les potentiels retardés :

En 1867, le physicien danois Louis Lorenz[3] invente donc ce qu'il appelle les potentiels retardés. Pour cela il part du potentiel scalaire et du potentiel vecteur que nous avons évoqués dans la première partie et qui, en un point M(x, y, z), valent respectivement :

$$\mathbf{r = \sqrt{(x-\xi)^2+(x-\xi)^2+(x-\xi)^2} + \vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\Omega \frac{\vec{j}(\xi,\eta,\varsigma).d\Omega}{r}}$$

$$\mathbf{V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_\Omega \frac{\rho(\xi,\eta,\varsigma).d\Omega}{r}} \quad \text{et} \quad \mathbf{\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\Omega \frac{\vec{j}(\xi,\eta,\varsigma).d\Omega}{r}}$$

---

[1] Ceci se démontre facilement en égalant les divergences des deux membres de chcune des équations 1 et 2, et en se souvenant que divergence d'un rotationnel est nulle (formule classique de l'analyse vectorielle).
[2] Ceci se démontre facilement en égalant les rotationnels des deux membres de chacune des équations 1 et 2, et en se souvenant que le rotationnel du rotationnel d'un vecteur est égal au gradient de sa divergence diminué de son laplacien (autre formule classique de l'analyse vectorielle).
[3] Qu'on confond souvent avec le physicien hollandais Anton Lorentz.

formules dans lesquelles $\mathbf{r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + (x-\varsigma)^2}}$ représente la distance du point M (fixe du point de vue de l'intégration) à chaque autre point K de l'espace (variable du point de vue de l'intégration).
On se souvient qu'on en extrait, toujours en régime continu, les champs par
Quand on passe au régime variable, les fonctions ρ et $\vec{j}$ deviennent des fonctions non seulement du point considéré {donc de ses 3 coordonnées spatiales}, mais aussi du temps (t).

La théorie des potentiels retardés consiste à écrire que E continue à dériver d'un potentiel vecteur scalaire (selon $\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{V}) - \dfrac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}}$) et B continue à dériver d'un potentiel vecteur (selon $\vec{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{A}})$) mais en prenant pour potentiel scalaire

$$\mathbf{V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_\Omega \frac{\rho(\xi,\eta,\varsigma,t-\frac{r}{c}).d\Omega}{r}}$$

et pour potentiel vecteur

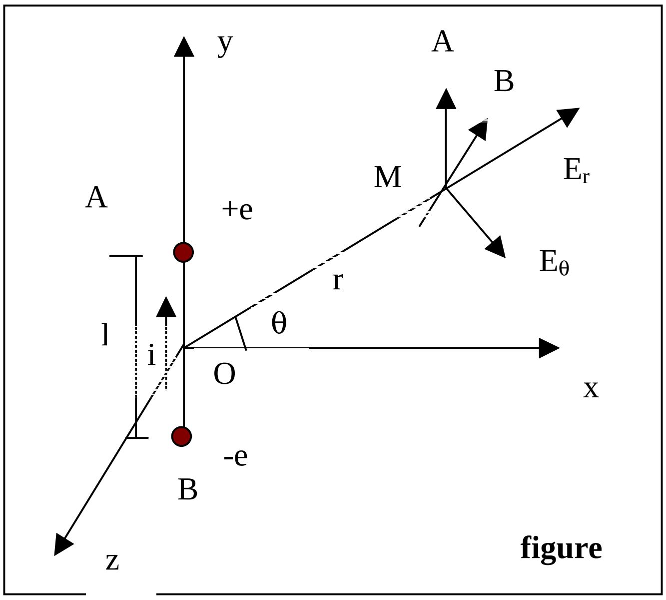
$$\mathbf{\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\Omega \frac{\vec{j}(\xi,\eta,\varsigma,t-\frac{r}{c}).d\Omega}{r}}$$

$\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{V})$ et $\vec{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{A}})$.

Ceci revient à dire que les densités de charge et de courant transmettent leur influence de K en M à la vitesse c de la lumière.

4 – Un exemple de l'application des potentiels retardés : l'expérience de Hertz :

Afin d'illustrer les relations existant entre champs du cas statique et champs du cas variable, nous allons maintenant étudier la fameuse expérience de Hertz, considéré à juste titre comme la première preuve expérimentale de l'existence des ondes électromagnétiques, qu'on appellera plus tard « ondes hertziennes ».
Dans le vide, considérons deux petites boules métalliques A et B chargées respectivement de (-e) et (+e), fonctions du temps. Elles sont distantes de l, distance fixe très petite devant r=OM, M étant le point de l'espace où nous voulons calculer les champs. A et B s'échangent leurs charges par un fil sans capacité rectiligne ; on se place dans un repère orthonormé direct Oxyz, A et B sont portés par Oy et O est leur milieu ; la figure étant de révolution autour de OY, on prend M dans le plan (Ox, Oy) pour simplifier les calculs ; l'angle (Ox, OM) est égal θ (cf. figure) :



figure

$\vec{p}$ est le moment électrique du dipôle formé par les boules A et B ; on donc les relations suivantes : $\mathbf{i = e' = \frac{de}{dt}}$; $\mathbf{e'' = \frac{d^2e}{dt^2}}$; $\mathbf{p = e.l}$; $\mathbf{p' = e'.l}$; $\mathbf{p'' = e''.l}$

Nous voulons calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en M ; la façon la plus simple est de calculer d'abord les potentiels retardés $\mathbf{V}$ et $\vec{A}$ (souvenons nous que $\varepsilon_0.\mu_0 = \frac{1}{c^2}$) :

<u>Premier calcul : calculons d'abord le potentiel scalaire</u> :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\sum\frac{e_{retardé}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{e(t-\frac{MA}{r})}{MA} + \frac{e(t-\frac{MB}{r})}{MB}\right] \text{ donc } V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e(t-\frac{r}{c})}{r}\right].dr$$

pour le déplacement $BA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\left(-\frac{e}{r^2}-\frac{e'}{c.r}\right).(-l.\cos(\theta))$

donc $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.l.\cos(\theta).\left(\frac{e}{r^2}+\frac{e'}{c.r}\right) = \frac{\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^2}+\frac{p'}{c.r}\right)$

<u>Second calcul : calculons ensuite le potentiel vecteur :</u>

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{i.l}_{retardé}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{e'.l}}{r} \text{ donc } \vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{p'}}{c^2.r} \text{ avec } A_y = A \text{ et } A_x = A_z = 0$$

<u>Troisième calcul : calculons ensuite</u> $\vec{E}$ <u>, le champ électrique :</u>

Soit $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ avec $\vec{E_1} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et $\vec{E_2} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Nous remarquons :

- que $\vec{E_1}$ est dans le plan xOy car $\mathbf{V}$ est de révolution autour de Oy, ce qui entraîne un travail nul de $\vec{E_1}$ pour un déplacement normal au plan xOy.
- que $\vec{E_2}$ est parallèle à Oy puisque $\vec{A}$ l'est.
- donc $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ est dans le plan xOy ; nous calculons ses deux composantes (cf. figure) $\vec{E_r}$ et $\vec{E_\theta}$.

Les calculs habituels sur les gradients en coordonnées polaires donnent alors :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_r = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\left(\frac{2p}{r^3}+\frac{p'}{c.r^2}\right)+\left(\frac{p'}{c.r^2}+\frac{p''}{c^2.r}\right)\right] - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p''}{c^2.r}.\cos\theta$$

donc $E_r = \frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^3}+\frac{p'}{c.r^2}\right)$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^3}+\frac{p'}{c.r^2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p''}{c^2.r}.\sin\theta$$

donc $E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^3}+\frac{p'}{c.r^2}+\frac{p''}{c^2.r}\right)$

Quatrième calcul : calculons ensuite $\vec{\mathbf{B}}$, le champ magnétique :
Les calculs habituels sur les rotationnels donnent alors :

$$\mathbf{B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_y}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial A}{\partial r}.\frac{z}{r} = 0}$$

$$\mathbf{B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0}$$

$$\mathbf{B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial r}.\frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\left(-\frac{p'}{c^2.r^2} - \frac{p''}{c^3.r}\right).\sin(\theta)}$$

$$\mathbf{B_z = \frac{-\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{c}\left(\frac{p'}{c.r^2} + \frac{p''}{c^2.r}\right)}$$

Récapitulons les résultats concernant $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$:

$\vec{\mathbf{E}}$	$\mathbf{E_r = \frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{c.r^2}\right)}$ $\mathbf{E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}.\left(\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{c.r^2} + \frac{p''}{c^2.r}\right)}$ $\mathbf{E_z = 0}$	$\vec{\mathbf{B}}$	$\mathbf{B = B_z = \frac{-\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{c}\left(\frac{p'}{c.r^2} + \frac{p''}{c^2.r}\right)}$ $\mathbf{B_x = B_y = 0}$

De ces formules on peut tirer plusieurs remarques concernant :
- le champ à petite distance r (r étant néanmoins grand devant l)
- le champ à grande distance r
- l'énergie rayonnée à grande distance

Remarque concernant le champ à courte distance :
C'est alors le terme en $\mathbf{(\frac{1}{r})}$ de degré le plus élevé qui est prépondérant, ce qui conduit à :

$$\mathbf{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{2.p.\cos\theta}{r^3}}$$

$$\mathbf{E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p.\sin\theta}{r^3}}$$

$$\mathbf{B = \frac{-\mu_0}{4\pi}.\frac{i.l.\sin(\theta)}{r^2}}$$

En n'oubliant pas que $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont exprimés en fonction des valeurs retardées de $\vec{\mathbf{p}}$ et de $\mathbf{i.\vec{l}}$:

- le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est celui du dipôle de moment électrique $\vec{\mathbf{p}}$, donné par la formule de Coulomb (cf. annexe 1 de la première partie de cet article).
- l'induction magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est celle de l'élément de courant il, donnée par la formule de Laplace (cf. annexe 1 de la première partie de cet article).

Enfin, si la variation des charges est périodique et sinusoïdale[4], $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont en quadrature ; on exprime ceci chez les radio-amateurs en disant que « près de l'antenne, l'énergie est réactive ».

<u>Remarque concernant le champ à grande distance :</u>
C'est alors le terme en $(\frac{1}{r})$ de degré le moins élevé qui est prépondérant, ce qui conduit au fait que $\vec{\mathbf{E}}$ se réduit à sa composante $\mathbf{E_\theta}$, et $\vec{\mathbf{B}}$ à sa composante $\mathbf{B_z}$, avec la relation suivante :
$\mathbf{E_\theta = -c.B_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p''.\sin\theta}{c^2.r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{i'.l.\sin\theta}{c^2.r}}$; on retrouve bien les résultats classiques des ondes électromagnétiques sphériques :

- les vecteurs champ électrique, induction magnétique et OM forment un trièdre rectangle direct.
- les modules de ces vecteurs sont proportionnels dans le rapport c (vitesse de la lumière).
- si l'oscillation est périodique et sinusoïdale, ils sont en phase[5] et décroissent comme le carré de la distance r (ce qui traduit le fait que l'énergie est rayonnée puisque l'aire de la sphère de rayon r est aussi proportionnelle au carré de r).

<u>Remarque concernant l'énergie rayonnée à grande distance :</u>
Si nous supposons l'oscillation périodique et sinusoïdale de pulsation ω, un calcul simple du vecteur de Poynting $\vec{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mu_0}.\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ montre qu'il est, pour une même valeur efficace i_e de i, proportionnel au carré de ω, ce qui explique la nécessité d'employer des fréquences élevées pour transmettre à grande distance des champs et une énergie sensibles.

---

[4] On se souvient que tout signal périodique est décomposable en une somme de signaux sinusoïdaux ; ceci signifie que la remarque est de portée générale.
[5] Ce qu'on exprime aussi en disant que le vecteur de Poynting « porte de l'énergie active ».