Champs et potentiels, deux approches de la théorie électromagnétique
(première partie : phénomènes indépendants du temps)

annexe : champs et potentiels des éléments dipolaires électrique et magnétique

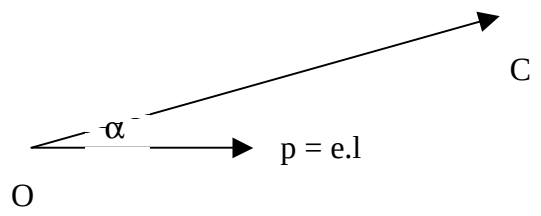
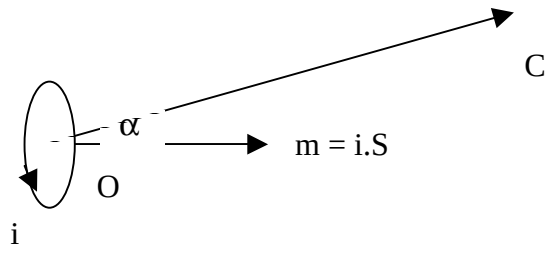
par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

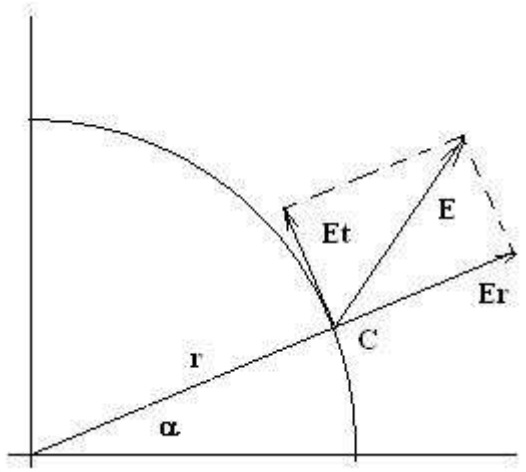
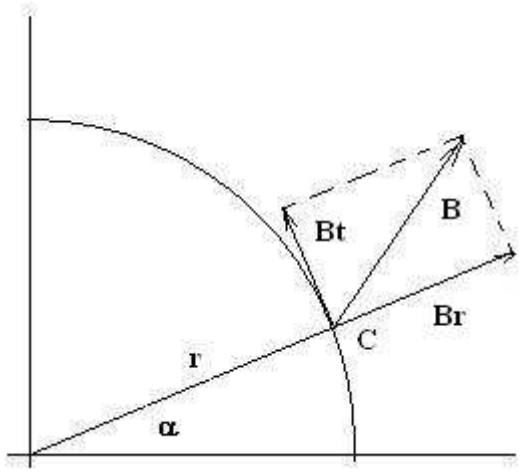
Dans cette annexe, nous nous intéressons à des ensembles un tout petit peu plus compliqués que les simples charges électriques ou les simples éléments de courant ; il s'agit plus précisément :

- *des éléments dipolaires électriques (2 charges égales et opposées très proches)*
- *des éléments magnétiques (petites boucles de courant)*

L'intérêt de tels ensembles est qu'ils sont les « briques de base » d'ensembles réellement rencontrés « dans la réalité » (les corps diélectriques sont des agrégats d'éléments dipolaires diélectriques ; les aimants et les électro-aimants sont des agrégats de petites boucles de courant).
En outre, on verra au passage la très grande similitude des champs (électrique et magnétique) quand on introduit le concept de « charge magnétique » par analogie avec le cas électrique, analogie qui va jusqu'à « l'apparition » d'un potentiel scalaire pour le champ magnétique.
Rappelons que nous sommes toujours en électrostatique et en magnétostatique ; donc pas de variable temps et pas de courant autre que continu (donc fermé).

Afin de ne pas alourdir la présentation, dans ce qui suit, nous ne donnerons aucune démonstration mathématique, nous contentant de donner des indications à ce sujet.
Le parallélisme entre cas électrique et cas magnétique est particulièrement saisissant d'après les tableaux comparatifs suivants :

éléments dipolaires électriques	**éléments magnétiques (petites boucles de courant)**
	
Le dipôle électrique est constitué de 2 charges (+e) et (-e) situées à une distance l. On appelle moment électrique le vecteur de module p=e.l porté par la droite reliant les charges et dirigé du pôle Sud (-e) vers le pôle Nord (+e) On veut déterminer le champ électrique en un point C tel que l soit infiniment petit par rapport à $\overrightarrow{OC} = \vec{r}$ et que l'angle entre $\vec{p}$ et $\overrightarrow{OC}$ soit égal à α	L'élément magnétique est constitué d'une petite boucle de courant i de section S. On appelle moment magnétique le vecteur de module m=i.S porté par la normale à la boucle et dirigé suivant la règle du tire-bouchon de Maxwell. On veut déterminer le champ magnétique en un point C tel que S soit infiniment petit par rapport à $\overrightarrow{OC} = \vec{r}$ et que l'angle entre $\vec{m}$ et $\overrightarrow{OC}$ soit égal à α
On calcule d'abord le potentiel scalaire et on trouve : $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p.\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$	On calcule d'abord le potentiel vecteur et on trouve : $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\overrightarrow{rot}(\frac{\vec{m}}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{(m.\sin\alpha)}}{r^2}$$

On calcule ensuite le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ et on trouve que ses composantes et son module (cf. figure) valent : $E_t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p.\sin\alpha}{r^3}$ $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{2p.\cos\alpha}{r^3}$ $E = \sqrt{E_t^2 + E_r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{p}{r^3}.\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}$	On calcule ensuite le champ magnétique $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ et on trouve que ses composantes et son module (cf. figure) valent : $B_t = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{m.\sin\alpha}{r^3}$ $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{2m.\cos\alpha}{r^3}$ $B = \sqrt{B_t^2 + B_r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{m}{r^3}.\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}$
	

La similitude des formules invite à se poser la question de savoir s'il ne serait pas possible de ramener le « cas magnétique » au « cas électrique ». La réponse est affirmative :

- d'une part, on peut considérer qu'une boucle de courant équivaut à « deux charges magnétiques <u>fictives</u> » (+n) et (–n) distantes de d tel que n.d = m ;
- d'autre part, on peut déterminer un potentiel scalaire U dont dérive le champ B selon la formule classique $\vec{B} = -\overrightarrow{grad}U$, ce qui a l'intérêt de simplifier beaucoup les calculs.

En fait, dans le « cas magnétique », on est en présence d'une sorte de « super-potentiel » vectoriel : $\frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{m}}{r}$ dont le rotationnel est le potentiel vecteur $\vec{A}$ et dont la divergence est le potentiel scalaire U. En résumé :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\overrightarrow{rot}(\frac{\vec{m}}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{(m.\sin\alpha)}}{r^2}$$

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi}.div(\frac{\vec{m}}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{m}.\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{m.\cos\alpha}{r^2}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} = -\overrightarrow{grad}U$$

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\frac{\vec{m}}{r})] = \overrightarrow{grad}[div(\frac{\vec{m}}{r})]$$