Champs et potentiels, deux approches de la théorie électromagnétique
(première partie : phénomènes indépendants du temps)

par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

Dans les cours théoriques actuels traitant des ondes hertziennes, le premier chapitre est généralement consacré aux équations de Maxwell, qu'on présente comme étant la base à partir de laquelle tout peur se déduire.
C'est bien sûr vrai, mais très abstrait, et cela ne correspond pas du tout à la chronologie suivant laquelle la théorie s'est bâtie en un peu plus d'une centaine d'années, de Coulomb à Maxwell. Les champs, et surtout les potentiels, ne sont pas apparus spontanément, même aux grands savants qui ont fondé l'électromagnétisme.
En outre, les équations de Maxwell ont d'abord été des généralisations osées des lois de l'électrostatique et de la magnétostatique, d'autant plus osées que rien dans la physique newtonienne de l'époque ne justifiait les « ficelles » (potentiels retardés de Louis Lorenz, courants de déplacement de James Maxwell) que les physiciens durent utiliser parce que la théorie de la relativité, seul cadre cohérent aux équations de Maxwell, n'était pas encore inventée.
Dans cet article, l'accent sera mis sur les deux approches que sont les champs et les potentiels, la première partie étant consacrée aux phénomènes indépendants du temps (électrostatique, magnétostatique), la seconde aux phénomènes dans lesquels le temps intervient(ondes hertziennes), une troisième partie expliquant en quoi la théorie de la relativité est le bon cadre de cohérence.

Quand on leur parle de rayonnement d'une antenne, les radioamateurs pensent immédiatement « champ électromagnétique ». Et quand on leur demande : « qu'est-ce que le champ électromagnétique ? » , ils répondent : « c'est un champ électrique E et un champ magnétique B qui se propagent conjointement ».

En répondant ainsi, ils approchent l'électromagnétisme par ce qu'on pourrait appeler « le canal historique », c'est-à-dire par la voie qu'ont empruntée les pères fondateurs des lois fondamentales, les lois de Coulomb pour le champ électrique E, les lois de Laplace pour le champ magnétique B[1].

1 - Historiquement, en effet, ce sont d'abord des forces qui ont été observées, décrites et mesurées :

- dans le cas de Coulomb, il s'agissait de la force exercée par une charge électrique statique sur une autre charge électrique statique (force électrostatique)
- dans le cas de Laplace, il s'agissait de la force exercée par un courant continu sur un autre courant continu (force magnétostatique)

Ces deux forces avaient en commun plusieurs propriétés remarquables, qui les apparentaient à la loi de l'attraction universelle de Newton :

- elles étaient symétriques (la charge e exerce sur la charge e' la même force que celle qu'exerce e' sur e au signe près, pour n'évoquer que Coulomb)
- elles variaient comme l'inverse du carré de la distance des objets concernés (charge pour Coulomb, courant pour Laplace)
- elles étaient proportionnelles à une caractéristique fondamentale mesurant la faculté des objets concernés à exercer cette force (les charges électriques dans le cas de Coulomb[2], les intensités des courants dans le cas de Laplace[3])[4]

---

[1] Les spécialistes critiqueront, et ils auront raison, le fait d'attribuer la paternité des lois en question à Coulomb et à Laplace, mais elles sont connues sous ces noms en France ; nous ferons donc comme si elles n'avaient pas d'autres pères, alors qu(ils sont nombreux…

[2] d'où le nom de Coulomb donné logiquement à l'unité de charge électrique

Ces forces présentaient aussi l'immense avantage d'être « visibles » : elles faisaient bouger des objets, on pouvait donc les expérimenter[5], les peser[6].

Le passage de la notion de force à celle de champ ne s'est effectué que plus tard, mais fondamentalement champ et force sont de même essence mathématique : des vecteurs se « triturant » comme tels[7], des vecteurs affectés à chaque point d'une portion de l'espace[8] et donc « opérables » comme toutes les fonctions de ce type[9]. Il est intéressant de voir comment on est passé de la notion de force à celle de champ dans les deux cas précités (Coulomb et Laplace)[10] :

Dans le cas de Coulomb, ce passage s'exprime à travers les 3 lois de Coulomb :
- la loi générale de Coulomb, qui est celle d'origine, qui exprime la force entre deux charges e_1 et e_2 :

$$\vec{F} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e_1.e_2}{r^2}.\vec{u}$$

- la loi directe de Coulomb, qui exprime le champ électrique créé par une charge e :

$$\vec{D} = \frac{1}{4.\pi}.\frac{e}{r^2}.\vec{u} = \varepsilon_0.\vec{E}$$

- la loi réciproque de Coulomb, qui exprime la force subie par une charge e dans un champ :

$$\vec{F} = e.\vec{E}$$

On voit donc que le passage de la notion de force à celle de champ consiste à considérer que la présence d'une charge électrique créée une perturbation alentour, perturbation appelée champ électrique, dont l'existence est précisément révélée par le fait qu'en introduisant une autre charge dans l'espace considéré, cette autre charge subit une force[11].

Dans le cas de Laplace, ce passage s'exprime à travers les 3 lois de Laplace :
- la loi générale de Laplace, qui est celle d'origine, qui exprime la force entre deux éléments de courant :

---

[3] comme chacun sait, le nom de l'unité de courant est l'Ampère, car André-Marie Ampère est celui qui a « découvert le courant électrique » et décrit ses effets magnétiques, ce qui n'enlève rien aux qualités de l'immense savant que fut Pierre-Simon de Laplace.
[4] comme la masse dans le cas de l'attraction universelle
[5] la méthode expérimentale chère à Claude Bernard n'était pas encore née, mais on savait faire la différence entre des expériences reproductibles dans lesquelles les mêmes causes produisent les mêmes effets, et le magnétisme de ceux qui font tourner les tables…
[6] cf. la balance à torsion de Coulomb qui a permis la mesure de forces très faibles avec grande précision
[7] par trituration des vecteurs, on entend ici toutes les méthodes permettant de les sommer, de les multiplier (produit scalaire, produit vectoriel, produit par un scalaire), de les décrire par leurs coordonnées dans un repère.
[8] D'où d'ailleurs l'appellation de champ attribué également à cette portion de l'espace elle-même (un champ de pommes de terre est une portion de l'espace où poussent des pommes de terre…)
[9] par opération des fonctions d'espace, on entend ici toutes les formes de dérivation et de différentiation (en particulier celles qui conduisent aux opérateurs tels que gradient, divergence, rotationnel, laplacien), et d'intégration (circulation le long d'une courbe, flux à travers une surface, intégrale volumique).
[10] Dans ce qui suit, on utilisera les notations habituelles (repérage, vecteurs unitaires, etc.) sans les repréciser.
[11] Un élève OM, à qui j'avais expliqué ça au club, m'avait dit « mais alors, cela signifie que le champ électrique de la première charge n'existe pas en l'absence de la seconde charge, puisque la présence de cette dernière est nécessaire pour le révéler ! » J'avais lâchement répondu « on peut dire ça, comme on peut dire que la tension dans la prise de courant n'existe pas tant qu'on n'y a pas mis les doigts pour vérifier… » A un tout autre niveau, on raconte qu'Albert Einstein et Max Planck avaient un jour une discussion sur le thème de l'existence ou de la non-existence d'un phénomène physique en dehors de son observation ; Albert, dit alors à Max « pendant que vous y êtes, dites moi donc que la lune n'existe pas quand je ne la regarde pas ! » ; réponse de Max : « comment voulez-vous que je le sache ? »

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\frac{\left(i_1.\overrightarrow{dl_1}\right)\wedge\left(i_2.\overrightarrow{dl_2}\right)}{r^2}$$

- la loi directe de Laplace, qui exprime la force subie par un élément de courant (ou par une charge e animée d'une vitesse v) dans un champ :

$$\vec{F} = \left(i.\vec{dl}\right)\wedge\vec{B} = e.\vec{v}\wedge\vec{B}$$

- la loi réciproque de Laplace, qui exprime le champ magnétique créé par un élément de courant :

$$\overrightarrow{dH} = \frac{1}{4.\pi}.\frac{\left(i_1.\vec{dl}\right)\wedge\vec{u}}{r^2} = \frac{1}{\mu_0}.\overrightarrow{dB} = \frac{1}{4.\pi}.\mathrm{rot}\left(\frac{i_1.\vec{dl}}{r}\right)$$

On voit donc que le passage de la notion de force à celle de champ magnétique consiste à considérer que la présence d'un courant créée une perturbation alentour, perturbation appelée champ magnétique, dont l'existence est précisément révélée par le fait qu'en introduisant une autre élément de courant dans l'espace considéré, cet autre élément de courant subit une force.

Quelques remarques importantes sur ces lois :

- les <u>lois générales</u> définissent les <u>interactions entre deux éléments de même nature</u> (charges ou courants), sans recours aux concepts de champs
- les <u>lois directes</u> définissent les <u>actions locales</u> dans un champ donné ; à partir de E et de B, elles ne font pas intervenir ε_0 et μ_0 ; c'est pourquoi on appelle parfois E et B, les vecteurs primaires ou les vecteurs actifs
- les <u>lois réciproques</u> définissent les <u>actions à distance</u> d'un élément donné (charge ou champ) ; contrairement aux cas directs, ce sont alors les vecteurs D et H qui interviennent dans les formules sans faire intervenir ε_0 et μ_0
- tout ce qui précède est valable dans le vide et, répétons le, pour des charges et des courants fixes dans l'espace et invariables dans le temps.

Si nous récapitulons les propriétés fondamentales des champs dans le cas de charges statiques et de courants continus, nous obtenons :

Champ électrique	**Champ magnétique**
<u>Propriété n°1</u> (définition) $\vec{D} = \varepsilon_0.\vec{E}$	<u>Propriété n°1</u> (définition) $\vec{B} = \mu_0.\vec{H}$
<u>Propriété n°2</u> le vecteur E est irrotationnel $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ le long d'un circuit fermé $\oint_C E_l.dl = 0$	<u>Propriété n°2</u> le vecteur B est à flux conservatif à travers une surface S fermée $\iint_S B_n.dS = 0$
<u>Propriété n°3</u> (théorème de Gauss) $\iint_S D_n.dS = \sum \text{charges intérieures}$	<u>Propriété n°3</u> (théorème d'Ampère) $\oint_C H_l.dl = \sum \text{courants}$

2 - Une autre approche que celle des forces, c'est-à-dire des champs, a été ensuite développée, c'est celle des potentiels : potentiel scalaire dans le cas de Coulomb, potentiel vecteur dans le cas de Laplace.

Pour mieux comprendre comment on passe des champs aux potentiels et réciproquement, il est intéressant de procéder par « difficulté croissante » en considérant successivement :

- les relations entre charge électrique, champ électrique et potentiel scalaire
- les relations entre courant, champ magnétique et potentiel vecteur

En outre, dans chacun des deux cas précédents, on examinera d'abord le cas simple d'une charge ponctuelle unique ou d'un élément de courant unique, puis on généralisera à des charges situations plus complexes (charges multiples, courants multiples, charges réparties, courants répartis).

<u>Considérons donc d'abord les relations entre charge électrique, champ électrique et potentiel scalaire :</u>

Soit une charge e immobile ponctuelle placée en O ; le champ électrique qu'elle crée en M tel que OM=r est donné par la loi réciproque de Coulomb

$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$ (on remarque que le champ varie comme l'inverse du carré de r car $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$

Intéressons nous à la fonction scalaire $V(M) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r}$ en calculant son gradient ; il vient :

$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{r}\right).\vec{u}_x + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{1}{r}\right).\vec{u}_y + \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{r}\right).\vec{u}_z\right]$, formule dans laquelle $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires des 3 axes du repère. Remarquons que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ donne $2.\frac{\delta r}{\delta x} = 2.\frac{x}{r}$ et donc $\frac{\delta r}{\delta x} = \frac{x}{r}$ puis $\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.\frac{\delta r}{\delta x} = -\frac{x}{r^3}$ ainsi que les formules correspondantes pour y et z. Donc

$$\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{x}{r^3}.\vec{u}_x + \frac{y}{r^3}.\vec{u}_y + \frac{z}{r^3}.\vec{u}_z\right] = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\overrightarrow{OM}}{r^3} = -\vec{E}$$

ou encore

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ ce qui démontre que le champ E est le gradient de la fonction scalaire –V ; <u>on dit alors que le champ E dérive du potentiel scalaire V</u>.

Ce potentiel, dont on voit qu'il se mesure en Volts, est une grandeurintéressante pour au moins 2 raisons :

- étant scalaire et non vectoriel, il est souvent plus facile à calculer et à manipuler que le champ lui-même ; pour passer au champ, il suffit de dériver
- ce potentiel a une connotation énergétique simple puisque le travail, pour déplacer une charge d'un point A à un point B est immédiatement donné par $T = e.(V_A - V_B)$

Notons enfin que l'on passe du cas simple d'une charge ponctuelle à celui de pusieurs charges ponctuelles en sommant : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\sum\frac{e}{r}$

et au cas d'une charge répartie (sous forme d'une densité volumique ρ dans un volume Ω) en intégrant : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_\Omega \frac{\rho.d\Omega}{r}$

Considérons maintenant les relations entre courant, champ magnétique et potentiel vecteur :

On va voir qu'à bein des égards la situation est assez analogue au cas précédent, mais avec une complexité plus grande principalement due au rotationnel.

Soit donc un élément de courant $\mathbf{i.\vec{dl}}$ placé en O et dirigé suivant l'axe $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$; le champ magnétique qu'il crée en M tel que OM=r est donné par la loi réciproque de Laplace $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\mathbf{i}\vec{\mathbf{dl}} \wedge \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{r}^3}$ (on remarque que le champ varie comme l'inverse de r^2 car $\left|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right| = \mathbf{r}$).

Intéressons nous à la fonction vectorielle $\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\mathbf{i}\vec{\mathbf{dl}}}{\mathbf{r}}$ en calculant son rotationnel ; il vient : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{A}}\right) = \frac{\mu_0.\mathbf{i}}{4\pi}.\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\frac{\vec{\mathbf{dl}}}{\mathbf{r}}\right) = \frac{\mu_0.\mathbf{idl}}{4\pi}.\mathbf{rot}\left(0.\overrightarrow{\mathbf{u}_x} + 0.\overrightarrow{\mathbf{u}_y} + \frac{1}{\mathbf{r}}.\overrightarrow{\mathbf{u}_z}\right)$

$$= \frac{\mu_0.\mathbf{idl}}{4\pi}.\left\{\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right).\overrightarrow{\mathbf{u}_x} - \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right).\overrightarrow{\mathbf{u}_y}\right\} = \frac{\mu_0.\mathbf{idl}}{4\pi}.\left\{-\frac{1}{\mathbf{r}^2}.\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}.\overrightarrow{\mathbf{u}_x} + \frac{1}{\mathbf{r}^2}.\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}.\overrightarrow{\mathbf{u}_y}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0.\mathbf{idl}}{4\pi.\mathbf{r}^3}.\left\{-\mathbf{y}.\overrightarrow{\mathbf{u}_x} + \mathbf{x}.\overrightarrow{\mathbf{u}_y}\right\} = \frac{\mu_0.\mathbf{idl}}{4\pi.\mathbf{r}^3}.\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}_z} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi.\mathbf{r}^3}.\mathbf{i}\vec{\mathbf{dl}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \vec{\mathbf{B}}$$

donc $\vec{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{A}}\right)$

ce qui démontre que le champ B est le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{\mathbf{A}}$; <u>on dit alors que le champ B dérive du potentiel vecteur A.</u>

Ce champ, parallèle au courant $\mathbf{i}\vec{\mathbf{dl}}$, a lui aussi une connotation énergétique reliée au travail effectué en déplaçant un courant dans un champ magnétique. Toutefois sa nature vectoriellele rend moins manipulable que le potentiel scalaire, et on préfère souvent repasser par un autre intermédiaire, scalaire lui, de calcul : le flux magnétique, en utilisant le théorème de Stokes qui dit que la circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée est égale au flux de son rotationnel à travers la surface délimitée par cette courbe : on obtient ainsi la célèbre formule de l'induction qui dit que $\mathbf{dT = i.d\phi}$ (travail = produit du courant par la variation du flux du vecteur B à travers l'élément de courant).

Le potentiel vecteur est surtout utilisé dans le cas où le temps intervient, celui des ondes hertziennes (cf. deuxième partie de l'article).

Notons enfin que l'on passe

Notons enfin que l'on passe du cas simple d'un élément de courant à celui de plusieurs courants en sommant : $\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\sum\frac{\mathbf{i}\vec{\mathbf{dl}}}{\mathbf{r}}$

et au cas de courants répartis (sous forme d'une densité volumique $\vec{\mathbf{j}}$ dans un volume Ω) en intégrant : $\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\Omega \frac{\vec{\mathbf{j}}.\mathbf{d\Omega}}{\mathbf{r}}$

Récapitulons les potentiels scalaire et vecteur :

Champ électrique et potentiel scalaire	Champ magnétique et potentiel vecteur
$\mathbf{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_\Omega \frac{\rho.d\Omega}{r}}$	$\mathbf{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\Omega \frac{\vec{j}.d\Omega}{r}}$
$\mathbf{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$ et $\mathbf{\vec{D} = \varepsilon_0.\vec{E}}$	$\mathbf{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$ et $\mathbf{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}.\vec{B}}$

<u>Bibliographie :</u>

- cours de physique de M. Jean Vignal (école polytechnique 1964-1965)