Qu'appelle-t-on « Divergence » et « Rotationnel » ?

par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

L'étude théorique des ondes électromagnétiques passe par celle des équations de Maxwell, qui font référence à deux concepts mathématiques assez abstraits : la divergence et rotationnel.

En effet, une formulation habituelle des équations de Maxwell dans le vide[1] est la suivante :
rot E +μ_0.**dH**/dt = 0 (loi de Faraday)
rot H = **J** + ε_0.d**E**/dt (loi d'Ampère généralisée)
div **E** = ρ/ε_0 (loi de Gauss)
div **H** = 0 (continuité du flux magnétique)
formulation dans laquelle les lettres en gras représentent des vecteurs (**E** champ électrique, **H** champ magnétique, **J** densité de courant) et les lettres en maigre des scalaires (μ_0 perméabilité magnétique, ε_0 permittivité électrique, ρ densité de charge électrique, t temps).

On voit que les premiers membres de ces formules font intervenir les champs E et H non pas en direct mais sous forme de ce qu'on appelle, en analyse vectorielle, des opérateurs : dans le cas présent leurs divergences et leurs rotationnels.

Mais que sont donc ces opérateurs aux noms si barbares ?

Pour répondre à cette question, je vois trois pistes :

- la première, la plus rigoureuse, consiste à donner leur définition mathématique ; elle est simple à exprimer mais peu compréhensible si on n'est pas familiarisé avec les dérivées partielles des composantes scalaires d'un champ de vecteurs (ouf !) ; on la trouvera dans tous les bons cours d'analyse vectorielle ou sur le site de wikipédia, par exemple (cf. bibliographie) ;
- la seconde, la plus « électromagnétiquement correcte », consiste à se reporter aux lois apportées par les pères fondateurs de l'électromagnétisme, en l'occurrence à Michael Faraday, André-Marie Ampère et Karl Friedrich Gauss ; mon petit article « les quatre formules magiques du Professeur Maxwell » que Radio-REF me fit l'honneur de publier en mars 1991 explore cette piste ; les pères fondateurs ne disposant pas des outils d'analyse que sont la divergence et le rotationnel, ils furent amenés à exprimer leurs lois de façon discursive et imagée ; en reprenant leurs discours et leurs images, et en les comparant aux équations de Maxwell, on voit émerger le concept de « divergence » et de « rotationnel », qui d'ailleurs est sorti de là comme bien souvent sont sortis de la physique beaucoup de concepts mathématiques, qui ne sont au départ que des « compacteurs de discours et d'images ».
- la troisième, qui a le défaut de n'être ni rigoureuse ni « électromagnétiquement correcte », est pourtant celle que je vais tenter d'utiliser ici ; elle repose sur des exemples géographiques et météorologiques (après tout, tout bon OM ne fait-il pas un QSO sans toujours parler de QTH et de WX, comme on dit dans le jargon… Il y en a même qui évoquent le QNH…).

Allons y en commençant par ne parler ni de divergence, ni de rotationnel, mais de gradient.
Pourquoi cette digression ? Parce que gradient, divergence et rotationnel sont comme les trois mousquetaires[2], les trois opérateurs inséparables des champs et que le gradient est le plus facile à se représenter. Et quand on a bien compris ce qu'est un gradient, il est plus facile de s'attaquer à la divergence et au rotationnel.

Considérons une carte géographique en relief comme celles qu'on utilise pour apprendre le relief aux enfants, par exemple une carte d'une partie de la Corse et posons la sur une table horizontale :

[1] et avec des grandeurs exprimées dans le système M.K.S.A.
[2] Comme je sens venir la remarque « mais les trois mousquetaires étaient quatre », je vous livre le nom du quatrième opérateur, aussi inséparable des trois autres qu'Aramis l'était de d'Artagnan, Athos et Porthos ; il s'agit du Laplacien ; lui intervient dans la résolution des équations de Maxwell ; il est franchement abstrait ; gardons le pour un prochain article…

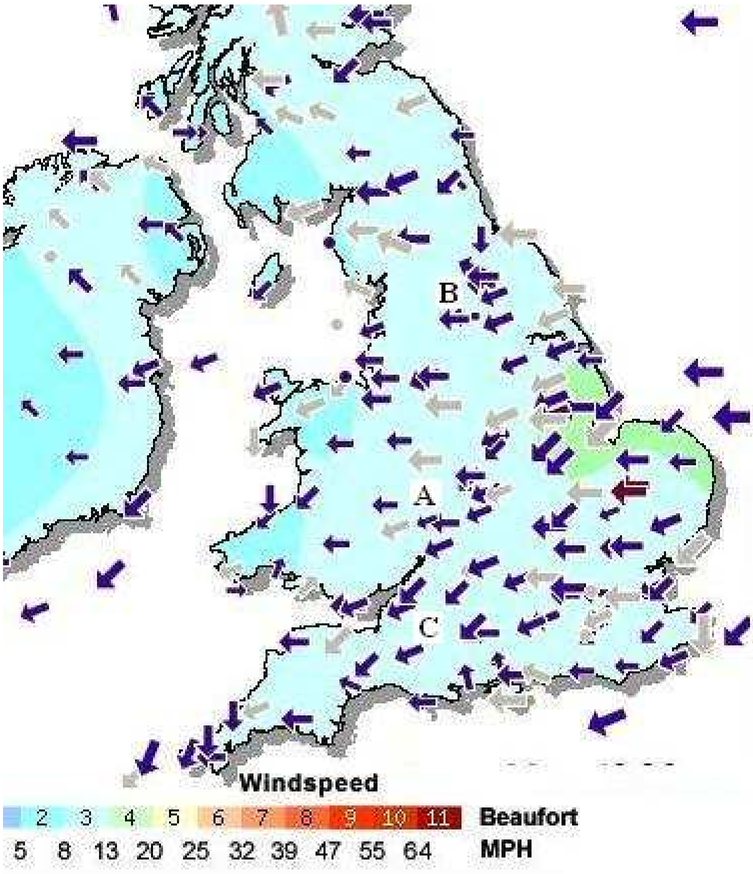
mathématiquement, cette carte en relief s'analyse comme un champ de scalaires, puisqu'à chaque point de la table on peut associer un scalaire égal à l'altitude de l'endroit correspondant en Corse sur la carte. A Ajaccio, nous affecterons le scalaire 0 puisque la ville est en bord de mer, et au sommet du Monte Cinto le scalaire 2710, qui en est l'altitude en mètres. Pour nous rendre par voie terrestre d'Ajaccio au Monte Cinto, nous suivrons une route qui monte jusqu'au col de Vizzavona , puis nous descendrons jusqu'à Ponte-Leccia, pour remonter ensuite jusqu'au sommet. A chaque point du parcours, nous serons donc sur une route qui soit monte, soit descend, soit est horizontale. Arrêtons nous en route en descendant de Vizzavona pour admirer le paysage, car il en vaut la peine. La route est à flanc de montagne et bien qu'elle soit en pente (5% par exemple), elle l'est moins que ne l'est le sol à sa droite côté ravin (45%) ou à sa gauche côté montagne (60%). Nous intéressant à la direction de plus grande pente, nous dirons que le gradient de l'altitude en ce point vaut 60 cm/m et qu'il est dirigé dans la direction de cette plus grande pente. Nous avons ainsi associé à un champ de scalaires (l'altitude), un champ de vecteurs indiquant, en pente et direction, la plus grande pente en ce point.

Dit par les mathématiciens, cela donne « le gradient d'un champ de scalaires est le champ de vecteurs associant à tout point du champ de scalaires le vecteur représentant, en grandeur et en direction, la pente maximale en ce point.

Si on trace les courbes de niveau sur le terrain, on voit que le vecteur gradient leur est perpendiculaire. On dit que le gradient dérive d'un potentiel, qui est l'altitude. On retrouvera cette propriété en électromagnétisme avec le champ électrique (dont le module est en Volts/m), vecteur dérivant d'un potentiel scalaire U (exprimé en Volts) : ce vecteur champ est perpendiculaire aux « courbes iso-potentiel » et sa longueur mesure la différence de potentiel entre ces courbes.

Retenons que le mot « gradient » ressemble au mot « gradin », et que les gradins sont les courbes de niveau qu'il faut gravir pour voir l'arène, quand on va au cirque.

Parlons maintenant de la divergence. Dans le cas du gradient, nous étions partis d'un champ scalaire et lui avions associé un champ vectoriel. Dans le cas de la divergence, nous allons faire le chemin inverse : partir d'un champ vectoriel pour aboutir à un champ scalaire.



Quittons la Corse pour une autre île, et examinons la carte des vents au sol en Angleterre.
Si on représente ceux-ci par des flèches donnant direction et force (vitesse en nœuds) du vent, on est bien en présence d'un champ de vecteurs. Que constatons-nous suivant les endroits :
- en certains points (point A, vers Birmingham, par exemple), le vent est le même, en force et direction, où qu'on soit).
- en d'autres points (point B, dans le Yorkshire par exemple), le vent s'étale dans un éventail de directions plus large.
- en d'autres points enfin (point C, près de Stonehenge par exemple) il semble au contraire resserrer ses directions.

A force égale, nous dirons que le vent diverge dans le cas B et qu'il converge dans le cas C, ou encore que sa divergence est positive dans le cas B, qu'elle est négative dans le cas C et nulle dans le cas A.

En fait, la divergence est un indicateur scalaire, donc un nombre positif ou négatif, qui mesure simultanément l'étalement (ou le resserrement) du vent et l'accroissement (ou l'affaiblissement) de sa force en un point ; plus précisément, la divergence du vent est la somme des variations de sa force dans les deux directions : du Sud vers le Nord et de l'Ouest vers l'Est[3].

On montre mathématiquement qu'un tel indicateur représente en fait la tendance à la dispersion (cas d'une divergence positive), à la concentration (cas d'une divergence négative), à la conservation (cas d'une divergence nulle), des « flux des éléments constitutifs du vent », à savoir des molécules d'air.

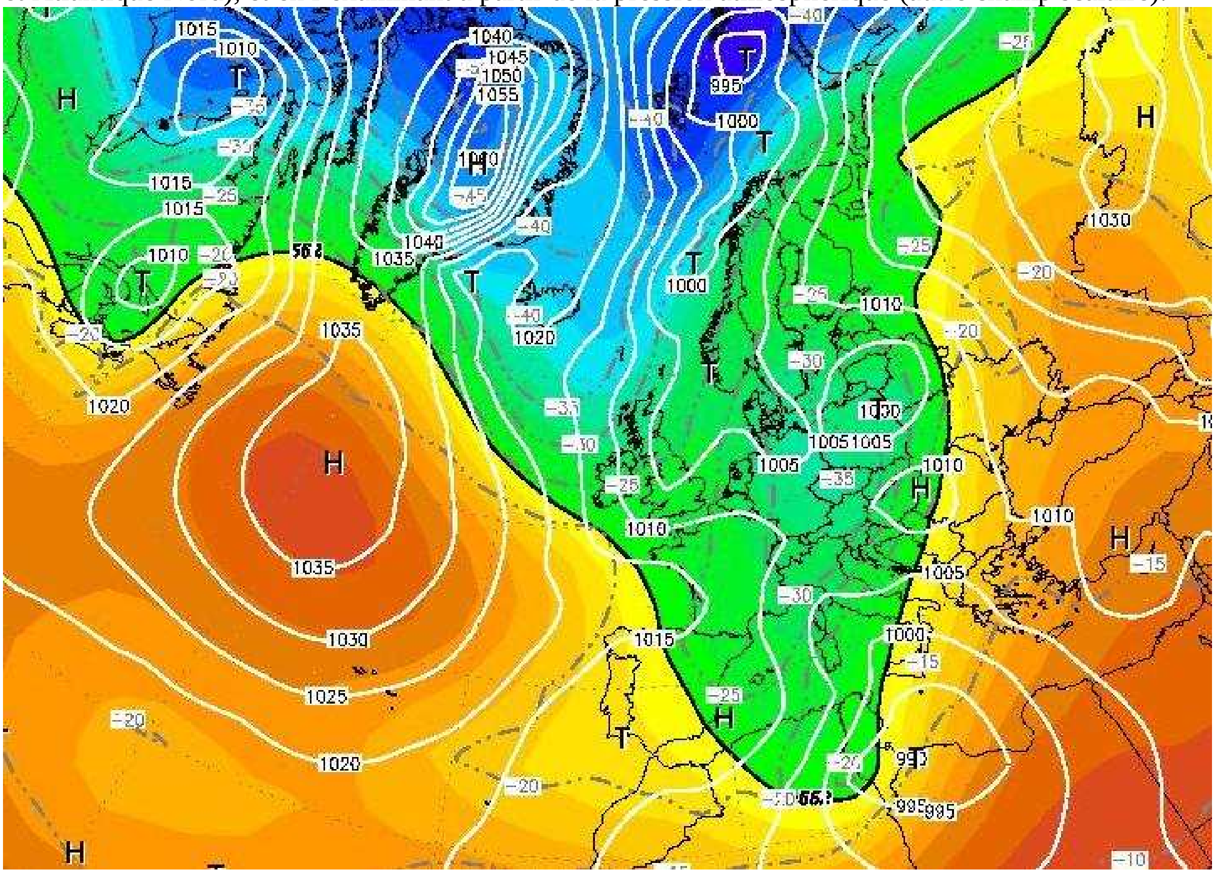
Dit par les mathématiciens, cela donne « la divergence d'un champ de vecteurs est le champ de scalaires associant à tout point du champ de vecteurs un scalaire égal à la somme des variations d'amplitude des composantes du champ de vecteurs suivant les trois directions orthonormées (ici, Ouest-Est, Sud-Nord, verticalement).

Puisque nous sommes en Grande Bretagne, rendons visite à James Clerk Maxwell et à ses équations. Celles qui parlent de divergence sont la n°3 (loi de Gauss) et la n°4 (continuité du flux magnétique). L'une comme l'autre sont en fait des lois exprimant, comme dans le cas du vent, que « quelque chose » se conserve globalement, même si « l'effet de ce quelque chose » n'est pas le même dans toutes les directions :

- dans le cas de la n°3, c'est la charge électrique qui se conserve
- dans le cas de la n°4, c'est le flux magnétique qui se conserve

[3] parce qu'on ne s'est intéressé qu'au vent dans les deux dimensions horizontales au niveau du sol ; si on avait examiné le vent en altitude, il aurait fallu considérer les trois dimensions, et sa divergence aurait été la somme des trois variations : suivant un parallèle, suivant un méridien et suivant une verticale.

Terminons par le plus abstrait des trois opérateurs : le rotationnel.
Dans le cas du gradient, nous étions partis d'un champ scalaire et lui avions associé un champ vectoriel. Dans le cas de la divergence, nous étions partis d'un champ vectoriel pour aboutir à un champ scalaire. Dans le cas du rotationnel, nous allons « faire le grand saut » : partir d'un champ vectoriel pour aboutir à un champ vectoriel.
Pour cela, continuons à nous intéresser au vent mais sur une aire plus vaste (Europe, Afrique du Nord et Atlantique Nord), et en l'examinant à partir de la pression atmosphérique (autre champ scalaire).



En examinant les courbes isobares, on les voit tournant autour de points de haute pression ou anticyclones (en particulier un à « raide » sur le centre du Groenland et un autre « moins raide » au sud du Groenland), et de points de basse pression ou dépressions (en particulier un à « assez raide » à l'Est du Spitzberg et un beaucoup « moins raide » sur la Libye).
Tous les météorologues vous diront que, dans l'hémisphère Nord[4], les vents sont engendrés par les différences de pression (les masses d'air des zones de haute pression, plus denses, se décompriment en comprimant les masses d'air des zones de basse pression, moins denses) ; mais la rotation de la terre fait que « cela tourbillonne » : les vents tournent alors autour des dépressions dans le sens inverse des aiguilles d'une montre[5] et dans le sens contraire autour des anticyclones. Ils ajouteront que plus les courbes isobares sont resserrées, plus la force du vent est grande. <u>Nous sommes donc en présence d'un champ de vecteurs (celui du vent) qui tournent autour de points particuliers : nous allons chercher un indicateur de cette **rotation** des vents, et nous l'appellerons tout naturellement « rotationnel »</u> ; nous prendrons un vecteur car cela nous permettra de représenter plusieurs « caractéristiques de cette rotation » à la fois :
- son axe (ici une verticale au centre de l'anticyclone ou de la dépression)
- son sens de rotation (un axe dirigé vers de sol vers l'atmosphère indiquera une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, et vice versa)

[4] On parle ici de l'hémisphère Nord, mais il est bien évident qu'il y a aussi des dépressions dans l'hémisphère Sud… Seule la loi de Buys Ballot est valable partout :" Lorsque l'on fait face à la direction d'où vient le vent, la dépression est à notre droite et l'anticyclone à notre gauche".
[5] « quand on voit cette montre de dessus et pas dans un miroir » ajouteront les puristes.

- sa vitesse de rotation (plus le module de ce vecteur sera grand, plus la rotation sera rapide). Dit par les mathématiciens, cela donne malheureusement quelque chose de difficilement compréhensible par les non-matheux…
Exprimons le quand même, mais oublions le tout de suite après :

Dit par les mathématiciens, cela donne : « le rotationnel d'un champ de vecteurs de composantes $\{F_x, F_y, F_z\}$ est un autre champ de vecteurs associant à tout point du premier champ un vecteur de composantes $\{(\delta F_z/\delta y - \delta F_y/\delta z), (\delta F_x/\delta z - \delta F_z/\delta x), (\delta F_y/\delta x - \delta F_x/\delta y)\}$ ».

Revenons un instant à la météorologie pour envisager le cas extrêmes des cyclones tropicaux : la dépression devient alors si importante que le tourbillon comporte des vents très violents (en termes mathématiques : les « vecteurs-vents » ont de très grands modules) s'enroulant autour de « l'œil du cyclone » (en termes mathématiques : les « vecteurs-vents » sont tangeants à des cercles concentriques) ; le rotationnel est donc un indicateur particulièrement adapté pour rendre compte de cet effet de tourbillon.
Dans le cas des équations de Maxwell, ce sont la n°1 et la n°2 qui comportent des rotationnels :
- <u>la n°1, qui correspond à la loi de Faraday</u> (cette loi qui veut qu'un aimant qu'on fait tourner devant une boucle de fil ouverte provoque une différence de potentiel aux bornes de cette boucle) : cette équation, si elle était « météorologisée », signifierait simplement que « la boucle présente une différence de pression atmosphérique (potentiel) entre ses extrémités, et donc est le lieu de circulation d'un vent (courant) si on la referme, et que cet « effet de cyclone » peut être estimé à partir du mouvement de la boussole (vitesse de variation du champ magnétique de l'aimant).
- <u>la n°2, qui généralise la loi d'Ampère</u> (cette loi qui dit qu'au voisinage d'un fil parcouru par un courant, il y a un champ magnétique qui s'enroule autour du fil comme les vagues provoquées par la chute d'un caillou dans l'eau) : cette équation, si elle était « météorologisée », signifierait simplement que « les ronds dans l'eau » le long desquels circule le champ magnétique autour du fil d'Ampère sont comme les vents autour de l'œil du cyclone, et peuvent être estimés à partir du courant dans le fil qui traverse l'œil du cyclone[6].

Pour conclure, revenons à l'objet de cet article : ce que sont « divergence et rotationnel ». On voit que ce sont des pièces de la « boîte à outils mathématiques », inventés pour résoudre simplement certains problèmes physiques, en mécanique des fluides (météo) et en électromagnétisme en particulier. Comme toujours, une fois ces outils inventés, on en a « tiré tout le jus possible » les « triturant mathématiquement » (cf. théorèmes de Stokes, de Green, de Helmholtz-Hodge, etc.). Certains matheux, que je trouve personnellement un peu extrémistes, vous diront que ces outils sont dépassés parce que l'analyse vectorielle, dont ils sont les briques de base, a elle-même été dépassée par une discipline plus vaste, qui est celle de l'analyse tensorielle, seule capable de traiter les cas de discontinuité ou de non-différentiabilité, tout comme ils vous diront que les fonctions sont dépassées par les distributions. Mais c'est là querelle de spécialistes. Disons qu'il est heureux qu'on invente en permanence des outils mathématiques plus puissants que ceux de la veille, mais qu'il reste quand même sage de ne pas jeter sa bonne vieille égoïne sous prétexte que le voisin a une scie électrique…

Bibliographie :

- Analyse vectorielle, encyclopédie en ligne de wikipédia (on y trouve en particulier toutes les formules de Leibnitz entre autres, tous les « croisements consanguins » tels que rot(rot), rot(grad), div(rot), etc.
- Hans Breuer, Deutscher Taschenbuch Verlag, Atlas zur Physik, Elektrizität und Magnetismus, München, 1988
- R. K. Wangness, Campos electromagnéticos, Editorial Limusa, México, 1983.
- J.P. Bourdier, F6FQX, Les 4 formules magiques du Pr Maxwell, Radio-REF, mars 1991

[6] je fais ici délibérément abstraction du terme en $\varepsilon_0.d\mathbf{E}/dt$ de l'équation n°2, qui est d'interprétation « météorologique » moins simple ; on pourra utilement se reporter aux excellents articles de F5NB sur le sujet. Notons toutefois que c'est précisément parce que l'interprétation de ce terme est complexe que les équations de Maxwell n'ont été exprimées que très longtemps après que les lois de Faraday et d'Ampère l'aient été, malgré les immenses capacités de conceptualisation des savants du XIXème siècle ; il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'encore aujourd'hui, nous radio-amateurs, modestes bricoleurs de la physique appliquée, prêtions parfois des vertus magiques à cet $\varepsilon_0.d\mathbf{E}/dt$, par exemple en matière de rayonnement d'antennes miraculeuses.