

Jean-Baptiste Joseph Fourier, ses séries, ses transformées

par F6FQX, Jean-Pierre BOURDIER

Nous autres, radio-amateurs, connaissons certains grands physiciens (André-Marie Ampère, Alessandro Volta, James Watts, Heinrich Hertz, Nikola Tesla, Michael Faraday, Joseph Henry, etc.) parce que nous utilisons couramment leurs noms pour unités. En revanche, d'autres grands savants, auxquels pourtant l'électronique doit tout autant, restent méconnus de beaucoup d'entre nous.

Parmi eux, Joseph Fourier (né en 1768 à Auxerre, mort en 1830 à Paris), occupe une place particulière. En effet, parmi ses découvertes¹, figurent des « outils » que les radio-amateurs, sans s'en rendre compte, utiliseront de plus en plus avec le développement de la « software radio », puisque ces outils sont au « traitement du signal » ce que bêche et râteau sont au « traitement du jardin ».

L'objet de cette note est de présenter ces outils de façon la moins mathématique possible, mais il faut un peu de maths quand même pour comprendre de quoi on parle.

Les « outils de Fourier » sont, dans l'ordre de leur découverte, la « série de Fourier », la « transformée de Fourier », la transformée inverse de Fourier », « la transformée discrète de Fourier », « la transformée rapide de Fourier ».....

J'insisterai davantage sur la série de Fourier et serai plus bref sur les transformées car ces dernières sont en fait des généralisations de la première : quand on a bien compris en quoi consiste la série, on comprend mieux ce que sont les transformées.

Le papier ne comprend pas de graphique afin de ne pas l'alourdir ; on pourra en trouver dans l'article que j'ai publié dans Radio-REF de juin 1991 sous le titre « les harmoniques pairs ont disparu ». On en trouvera de bien plus intéressants encore aux adresses données dans la bibliographie en fin de document.

Quelques petits rappels d'analyse mathématique

- dans ce qui suit, on utilisera le terme « fonction » au sens habituel des physiciens, à savoir l'opération qui permet de définir une grandeur mesurable (par exemple une tension U en Volts) à partir d'une variable mesurable (par exemple le temps t en secondes) ; on écrira alors $U=f(t)$, formule qu'on lira « U égale f de t ».
- il pourra arriver que la grandeur soit double (par exemple une tension et une phase) ; dans ce cas, il pourra être intéressant de passer des nombres réels aux nombres complexes, ce qui ramènera formellement au cas « simple » (tout OM, même non matheux, connaît ce cas de figure, qui est celui du passage d'une résistance –simple- à une impédance –double-).
- une série est un ensemble de grandeurs U_n indicées de $n=1$ à $n=+\infty$ dont on fait la somme $S_n = U_1 + U_2 + U_4 + \dots + U_n$; si, quand n tend vers l'infini, cette somme S_n tend vers une limite finie, on dit que la série est convergente.

¹ N'est évoquée ici qu'une petite partie de l'œuvre de Joseph Fourier, qui va des mathématiques à l'égyptologie (certains le considèrent comme l'égal de Champollion avec lequel il travailla beaucoup), en passant par la physique fondamentale (propagation de la chaleur).

- une série trigonométrique est une série dont les U_n sont des sinus ou/et des cosinus d'une variable (ou dont les U_n sont, en utilisant les nombres complexes, des fonctions exponentielles d'une variable complexe)
- une fonction périodique de période T du temps est une fonction telle que la grandeur $U=f(t)=f(t+T)$ quel que soit t ; on peut dire que les fonctions périodiques « les plus simples » sont les fonctions trigonométriques sinus et cosinus : tout OM est familier avec ce qu'il appelle « une porteuse pure » qui, à l'oscilloscope, en donne la représentation parfaite.
- les intégrales dont il sera question ici sont des intégrales définies, avec les extensions classiques en la matière quand on intègre sur l'ensemble de la droite réelle ou sur un arc dans le plan complexe.

La série de Fourier :

Fonctions périodiques et séries trigonométriques :

Il semble que le premier savant à avoir eu l'idée de ramener l'étude de fonctions périodiques à celle de séries trigonométriques soit le Suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) lorsqu'il fit l'étude des cordes vibrantes. C'est d'ailleurs un peu le réflexe qui anime l'OM quand il se représente « la vibration de son antenne filaire » en y « casant des multiples entiers de demi-ondes ». Toutefois, sans rien enlever à Bernoulli, le génie de Joseph Fourier fut de considérer que cette décomposition d'un phénomène périodique en série trigonométrique pouvait éventuellement être utilisé comme un outil systématique, voire étendu à des domaines inattendus comme le cas de phénomènes discontinus, voire même de phénomènes non périodiques. Son étude de la propagation de la chaleur dans les solides, de 1802 à 1822, lui fournit l'occasion de développer cette théorie ;

Plaçons nous dans le cas le plus simple, à savoir une fonction périodique réelle de période T (par exemple le module d'une tension U , lue aux bornes d'une charge au Voltmètre) de la variable t (temps) ; si la courbe est une belle sinusoïde (la porteuse pure précitée), nous n'avons pas besoin de décomposition en série trigonométrique, ou plutôt la série se ramène à un seul terme ; si, comme c'est plus généralement le cas, la courbe n'est pas sinusoïdale, bien que périodique, on peut imaginer qu'elle est peut-être la superposition de beaucoup de sinusoïdes de fréquences et d'amplitudes différentes (comme sur la mer quand on voit des vagues, sur les vagues des vagues plus petites, sur ces vagues plus petites encore d'autres vagues encore plus petites, etc.).

Le pari de Joseph Fourier fut que toutes ces sinusoïdes superposées avaient en commun d'avoir des fréquences qui étaient des multiples entiers (harmoniques) d'une fréquence de départ (appelée fondamentale) ; ce pari était osé car s'il se « justifiait intuitivement » dans le cas des cordes vibrantes de Bernoulli (à cause de la contrainte de la dimension physique des cordes et des réflexions en bout, comme pour l'antenne filaire de l'OM...), pourquoi en aurait-il été ainsi dans le cas de la chaleur ? Ce pari supposait deux « a priori » mathématiques ni démontrés alors, ni intuitifs :

- la convergence des séries trigonométriques : qu'est-ce qui prouvait qu'en sommant à l'infini (ce qui, soit dit en passant, est infaisable pratiquement²), la série convergeait, et convergeait en outre vers la même valeur que celle donnée par la fonction ?

² En toute rigueur mathématique, une « somme infinie » n'est pas une somme mais la limite d'une somme.

- l'incompatibilité, dans certains cas, entre continuité de chacun des termes de la série trigonométrique, et la discontinuité de la fonction (grandeur variant par exemple par tout ou rien, entre deux états logiques) ?

Plusieurs grands mathématiciens s'opposèrent d'ailleurs violemment à Joseph Fourier sur ces questions, dont Laplace, Lagrange et Poisson. Ils n'avaient pas complètement tort car il fallut ensuite des décennies pour :

- trouver des cas de fonctions périodiques dont les séries trigonométriques ne convergent pas, c'est-à-dire des cas où l'analyse de Fourier « ne marche pas » ; heureusement, il s'agit de cas très particuliers ne correspondant pas aux cas habituels ; dans l'immense majorité des cas, l'intuition de Joseph Fourier était donc bonne.
- régler la question du paradoxe continuité-discontinuité (ce n'était pas la continuité mais l'intégrabilité qui était en cause) ; là aussi l'intuition de Fourier était la bonne pour la plupart des cas.

Revenons maintenant à notre fonction périodique réelle de fréquence $N=1/T$ et donc de période T (par exemple le module d'une tension U , lue aux bornes d'une charge au Voltmètre) de la variable t (temps) ; dont la courbe n'est pas sinusoïdale, bien que périodique, et supposons, comme Joseph Fourier, qu'elle soit la superposition d'une infinité de sinusoïdes de fréquences multiples entières de la fréquence fondamentale. En écriture mathématique, cela signifie qu'on a :

$$U = f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cdot \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \cdot \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right\}$$

et proposons nous de calculer les coefficients a_n et b_n .

La méthode consiste à faire un peu de calcul intégral mais, rassurez vous, c'est très simple.

Calculons d'abord a_0 ; pour cela, intégrons $f(t)$ de $t = -\frac{T}{2}$ à $t = +\frac{T}{2}$; tous les termes en sinus

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot dt$$

et cosinus vont s'annuler et on va obtenir $f(t)$ comme on pouvait s'y attendre. c'est-à-dire la valeur moyenne de

Calculons ensuite a_n en multipliant les deux membres de l'égalité par $\cos(2\pi \frac{n}{T} t)$ et
intégrons de $t = -\frac{T}{2}$ à $t = +\frac{T}{2}$; tous les termes sauf précisément celui en $\cos(2\pi \frac{n}{T} t)$ vont

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(2\pi \frac{n}{T} t) \cdot dt$$

s'annuler et on obtiendra finalement

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \cdot dt$$

Le même type de calcul, mutatis mutandis, donnera

Si maintenant, on adopte la notation complexe, on trouvera :

$$U = f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-i.2\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{avec pour les coefficients :} \quad c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i.2\pi \frac{n}{T} t} \cdot dt$$

L'intérêt de cette série trigonométrique, dite série de Fourier de la fonction $f(t)$ est :

- de donner explicitement ce qu'on appelle aujourd'hui le spectre des fréquences du signal $f(t)$, fondamentale et harmoniques.
- de ramener l'étude d'un signal compliqué à celui de signaux simples, des signaux sinusoïdaux.

Rappelons toutefois que jusqu'ici il n'est question que de signaux périodiques. Que devient la méthode quand, comme dans le cas le plus fréquent en physique, on a à traiter un signal non périodique ? Là encore le génie de Joseph Fourier a été de trouver une généralisation en substituant ce qu'on appelle aujourd'hui « la transformée de Fourier » à « la série de Fourier ».

La transformée de Fourier et la transformée inverse de Fourier

Deux approches de cette généralisation sont possibles, soit qu'on considère qu'un signal non périodique est un signal de période infinie, soit qu'on transpose de façon plus théorique un calcul de série en calcul d'intégrale.

La première approche est utile pour « visualiser » le phénomène, notamment à l'oscillo ou à l'analyseur de spectre en réduisant de plus en plus la fréquence et en observant comment les courbes se déforment.

La seconde approche est incontournable dès qu'on veut utiliser des outils mathématiques. Nous adopterons donc celle-ci en donnant les résultats principaux auxquels elle conduit.

Soit donc une grandeur fonction du temps $U = f(t)$ qui est cette fois non périodique. Elle n'est pas non plus nécessairement continue. La seule condition a priori est qu'elle soit intégrable³.

On appelle alors transformée de Fourier de $f(t)$ la fonction $F(s)$ donnée par :

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-ist} \cdot dt$$

L'intérêt de cette opération est qu'elle est « réversible » et qu'on peut retrouver $f(t)$ à partir de $F(s)$ par ce qu'on appelle la transformée inverse de Fourier la fonction donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{-ist} \cdot ds$$

De ces formules découlent les intéressantes propriétés suivantes :

³ Hélas, en toute rigueur, cette condition d'intégrabilité ne suffit pas non plus à pouvoir définir une transformée de Fourier inverse : il faut en outre que la fonction soit de carré sommable ; en fait, pour trouver un cadre parfaitement adopté à la théorie, il faut sortir du domaine des fonctions et adopter celui des distributions de Laurent Schwartz, que j'ai eu l'honneur d'avoir comme professeur d'analyse dans les années 60. Mais nous sortons là très largement du cadre de ce modeste papier.

- la transformation est linéaire
- la transformation de Fourier est continue, de limite nulle à l'infini et bornée
- la transformation de Fourier échange dérivation et multiplication par $(\pm i.x)$

Ces propriétés rendent la transformation de Fourier très « sympathiques » quant aux calculs.

On voit que $f(t)$ décrit le signal en fonction du temps alors que $F(s)$ le décrit en fonction de sa fréquence ; la première fonction est dite du domaine temporel et la seconde du domaine spectral.

Toutefois, rien n'étant parfait, on se rend compte à l'usage que transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse, malgré leur intérêt en matière d'analyse spectrale d'un signal, restent des outils plus théoriques que pratiques. Ceci fait que si le XIX^{ème} siècle a surtout vu la théorie se développer sous l'angle de la rigueur mathématique des concepts en jeu, le XX^{ème}, et jusque dans les années 1990, a été consacré à développer des outils pratiques d'analyse numérique : transformée discrète et transformée rapide.

La transformée de Fourier directe et la transformée de Fourier rapide

Transformée de Fourier et transformée inverse ne peuvent être utilisés que si les données étudiées ont une représentation formelle (c'est-à-dire qu'on peut les décrire par une formule mathématique : par exemple dans le cas d'un filtre linéaire non récursif ou d'un signal sinusoïdal.

Or, dans les études en traitement du signal, on est amené à représenter des signaux dont la transformée ne peut pas s'écrire comme une formule dépendant d'un aussi petit nombre de paramètres. Et même dans le cas où une écriture formelle existe, on a souvent besoin de représenter la transformée de Fourier d'un signal ou la réponse en fréquence d'un filtre. On utilisera pour cela les outils informatiques.

L'utilisation de techniques numériques pour effectuer un calcul de transformée de Fourier suppose que le nombre de données à traiter soit fini et que le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule la transformée soit aussi fini.

Pour conserver la même quantité d'informations, on calculera autant de données dans le domaine des fréquences qu'il y a d'échantillons du signal dans le domaine temporel. C'est l'objectif-même de **la transformée de Fourier discrète**, qui est donc la transposition en outil informatique de la transformée de Fourier stricto sensu.

La transformée de Fourier discrète substituera donc à la formule théorique avec intégrale définie des sommes discrètes avec des formules du type :

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{n} j k} \quad j = 0, \dots, n-1.$$

dans lesquelles les x_k seront des nombres complexes.

Mais, même ces formules présentent un inconvénient pour les informaticiens, celui du temps de calcul jugé prohibitif ; en effet, on voit qu'on a à faire à des matrices à n colonnes et n lignes, donc à des calculs dont le temps croît comme **le carré du nombre n** ; c'est pour réduire ce temps qu'a été inventée la transformation de Fourier rapide.

La **transformation de Fourier rapide**, pour prendre une image connue des radio-amateurs, est, très grossièrement, à la transformée discrète ce qu'est la BLU à l'AM. On cherche à réduire les redondances d'information dans le calcul de la transformée discrète, et on peut alors arriver à un temps de calcul qui ne croît plus que comme le produit **$n \cdot \log(n)$** ⁴, ce qui est une réduction colossale quand on est, comme toujours en informatique, dans le domaine des grands nombre d'opérations (par exemple, pour $n=10^6$ opérations, on voit que le calcul est 70000 fois plus rapide !). Bien sûr, **la transformation inverse** se génère de la même façon, du fait de la similitude des formules.

La transformation de Fourier rapide a donc donné lieu au développement de très nombreux algorithmes, dont je ne cite que quelques-uns sans entrer dans les détails, très spécialisés, qui relèvent de l'analyse numérique (les noms sont ceux des mathématiciens à qui on les attribue) :

- algorithmes « sans erreur »⁵

- Carl Friedrich Gauss (1805), méthode par récursion
- James Cooley et John Turkey (1965), adaptation du précédent
- Goog-Thomas, variante de Cooley-Turkey basée sur le « théorème des restes chinois »
- Rader-Brenner, également
- Bruun, méthode récursive basée sur des polynômes
- Winograd, méthode polynomiale recourant aux nombres premiers et à la convolution
- Bluestein (algorithme dit « chirp-z »), autre méthode de convolution
- Sorensen (1987), variante « allégée » de Cooley-Turkey

- algorithmes avec « une marge d'erreur »⁶ :

- Edelman et al. (1999), méthode destinée à une implémentation en parallèle
- Guo et Burrus (1996), méthode basée sur les ondelettes
- Shentov et al.(1996)
- Gentleman et Sande (1966)
- Ergün (1995), méthode permettant la mesure de la validité de l'algorithme.

On remarquera que le nombre de méthodes et le caractère très récent de certaines d'entre elles attestent que le thème de la transformation de Fourier est à la fois vaste et encore en progrès près de deux siècles après son apparition.

Bibliographie :

- sur la théorie générale de la série de Fourier et des transformées de Fourier, le site canadien de wikipédia est excellent :
http://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier
- une excellente biographie détaillée de Joseph Fourier et de son oeuvre est disponible à : <http://joseph.fourier.free.fr/>
- sur les techniques numériques pour le traitement du signal, et en particulier sur la transformée rapide, on peut utilement consulter :
<http://www.essi.fr/~leroux/courssignal/>

⁴ L'invention du logarithme lui-même n'avait-elle pas pour objet de simplifier les calculs astronomiques en transformant les multiplications en additions ?

⁵ du fait de leur nature analytique (un peu comme la compression d'images « sans perte de qualité » en informatique)

⁶ comme les « .jpg » en compression d'images en informatique

Série et transformée de Fourier (presque⁷) sans mathématiques

Complément à la note «Jean-Baptiste Joseph Fourier, ses séries, ses transformées »
par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

Un tout petit peu d'histoire

Joseph Fourier s'intéressait, entre autres, à la propagation de la chaleur dans les métaux. Une de ses expériences consistait à disposer d'une barre métallique dont il chauffait une extrémité et mesurait comment variait, avec le temps, la température aux deux bouts.

Il fit alors plusieurs constatations, certaines attendues, d'autres inattendues :

- Constatation 1 : chauffer une extrémité élève la température de cette extrémité
- Constatation 2 : cela élève aussi la température de l'autre extrémité, mais un peu plus tard (la chaleur se propage donc dans la barre avec une certaine vitesse)
- Constatation 3 : si l'apport de chaleur est tel qu'il provoque une variation périodique de la chaleur à un bout, la variation de température à l'autre bout est également périodique et de même période
- Constatation 4 : dans certaines configuration de la barre, et en particulier si la barre est suffisamment longue, quelle que soit la forme du « signal température » périodique à l'extrémité chauffée, la température à l'autre extrémité varie suivant une fonction quasiment sinusoïdale du temps de même période.

Joseph Fourier eut alors l'intuition que le signal périodique de forme quelconque imposé à la barre en la chauffant était en fait la somme de plusieurs « composantes », c'est-à-dire de signaux de forme plus simple (des sinusoïdes), et que la barre, suivant la forme qu'on lui donnait, jouait un « rôle de filtre » en ne « laissant arriver » à l'autre bout que l'autre que l'une de ces composantes. Comme souvent en sciences expérimentales, c'est en partant de ces constatations et de cette intuition qu'il inventa les puissants outils mathématiques dits de « l'analyse de Fourier » (série et transformée).

Le chant du pipeline

Beaucoup plus modestement que Joseph Fourier, j'ai eu deux cents ans plus tard à travailler en tant que technicien dans l'industrie pétrolière et je me souviens d'une expérience amusante au Sahara. Les essais lors de la mise en service d'un pipeline font qu'on en manœuvre les vannes dans les postes de sectionnement. Cette manœuvre de fermetures et d'ouvertures répétées fait un bruit assez caractéristique de porte qu'on ferme et qu'on ouvre. C'est un signal périodique par nature mais peu musical (donc, a fortiori, non sinusoïdal). En revanche, quand on écoute le signal à quelques kilomètres de son lieu d'émission (dans le prochain poste de sectionnement) on le trouve très pur (et très grave). Le signal a été « filtré » par le tube du pipeline, qui n'en a laissé subsister au loin que la fondamentale.

Le Père Noël vous a apporté cette année un magnifique récepteur toutes bandes et tous modes

C'est d'ailleurs un Père Noël généreux et riche puisque l'an passé vous aviez eu droit à un analyseur de spectre⁸, et il y a deux ans à un oscilloscope⁹. Avec ces 3 appareils, vous allez

⁷ On parlera quand même un peu de mathématiques, mais sans dépasser ce qu'un OM doit savoir pour passer sa licence d'émission.

⁸ Dans la suite, on appellera cet appareil « spectro ».

⁹ Dans la suite, on appellera cet appareil « oscillo ».

enfin pouvoir vous livrer à des expériences auditives et visuelles traitant de l'analyse de Fourier. L'écoute d'une émission dans laquelle il est question de musique vous en donne l'occasion.

Cela tombe bien, France Musique diffuse justement une émission consacrée à l'apprentissage de la guitare. On y entend des personnes qui parlent, quelques airs simples de guitare (des accords répétés par exemple) et, de temps en temps, la note d'un diapason.

Pour bien comprendre les phénomènes, vous faites appel à votre ouïe (via le haut-parleur de votre récepteur) et à votre vue (via oscillo et spectro branchés en parallèle sur le haut-parleur). Comme le temps joue un rôle dans cette expérience, vous prenez en outre des photos simultanées des deux écrans à certains instants.

Enfin, vous utilisez un réglage bien pratique de votre récepteur, qui permet de faire varier la largeur de bande restituée par le haut-parleur de 20 kHz (bande large) à 20 Hz (bande étroite). C'est un excellent récepteur, n'est-ce pas ?

Première expérience : les speakers parlent

Votre récepteur est réglé en bande large. Vous comprenez parfaitement ce qu'ils disent. Le spectro vous montre un paysage montagneux fait de pics et de creux pointus s'étalant sur tout le spectre et variables tant en amplitude qu'en position. L'oscillo vous montre un paysage plus marin que montagneux : des sommets et des creux, mais beaucoup plus « arrondis et pleins », qui vous font penser à la surface de la mer, avec de grosses vagues, des vagues moyennes et des petites, variables aussi en position et en amplitude et s'étalant sur tout le spectre. Ces paysages ne se répètent pas d'un instant à l'autre (plusieurs photos prises à des instants différents sont toutes différentes). Vous vous dites, à juste titre : je suis en face d'un signal non périodique, avec beaucoup de fréquences présentes.

Les speakers parlent toujours mais, maintenant, vous décidez de passer votre récepteur en « bande étroite », plus exactement vous le réglez de sorte qu'il ne laisse passer que les signaux entre 100 Hz et 110 Hz. Premier effet : comme vous vous y attendiez, vous ne comprenez plus du tout ce qui se dit. Deuxième effet : votre spectro ne vous montre plus qu'un pic à la même position tout le temps mais d'amplitude fluctuant irrégulièrement avec le temps. Troisième effet : votre oscillo vous montre une courbe qui est une sinusoïde presque pure, dont l'amplitude fluctue irrégulièrement avec le temps. En outre, vos photos vous montrent que le pic au spectro et la sinusoïde à l'oscillo sont corrélés en temps et en amplitude (c'est-à-dire que l'un existe quand l'autre existe, et que plus l'un est haut plus l'autre est ample). Vous vous dites à juste titre : je suis en face d'un signal périodique sinusoïdal avec une fréquence unique, signal dont l'amplitude maximale varie elle-même avec le temps.

Vous refaites la même expérience en changeant la bande passante de votre récepteur, plus exactement en le calant de 20 Hz à 30 Hz, puis de 30 Hz à 40 Hz, etc. jusqu'à de 19990 Hz à 20000 kHz (quel courage !). Chaque fois, vous constatez exactement le même type de phénomène. Vous déduisez de cette première expérience les conclusions suivantes :

- en « découpant en tranches fines » de fréquence un signal non périodique, on trouve des signaux quasiment sinusoïdaux sur toutes les fréquences.

- un signal non périodique est donc la somme d'un très grand nombre de signaux simples sinusoïdaux¹⁰.

Bravo, vous venez de découvrir expérimentalement ce qu'est la transformée de Fourier : partant d'un signal non périodique, on peut, de façon continue, à chaque fréquence du spectre considéré, associer un signal sinusoïdal dont l'amplitude maximum varie avec le temps. On est donc en présence, à tout moment, « d'une infinité continue de signaux » sinusoïdaux superposés.

Seconde expérience : les guitares jouent des airs simples, par exemple des accords répétés

Votre récepteur est réglé en bande large. Vous reconnaissez facilement des mélodies très répétitives, c'est-à-dire un signal avec beaucoup de notes, mais périodique. Le spectro vous montre encore un paysage montagneux fait de pics et de creux pointus s'étalant sur tout le spectre et variables tant en amplitude qu'en position mais, cette fois, régulièrement espacés. L'oscillo vous montre un paysage plus marin que montagneux : des sommets et des creux, mais beaucoup plus « arrondis et pleins », qui vous fait penser à la surface de la mer, avec de grosses vagues, des vagues moyennes et des petites, variables aussi en position et en amplitude s'étalant sur tout le spectre aussi, mais avec une énorme différence par rapport au cas de la parole : cette fois, le signal, bien que « non simple », se reproduit à intervalles de temps réguliers. Vous vous dites, à juste titre : je suis en face d'un signal périodique non sinusoïdal, avec moins de fréquences présentes (elles sont régulièrement espacées) que dans le cas de la parole.

La musique joue toujours mais, maintenant, vous décidez de passer votre récepteur en « bande étroite », plus exactement vous le réglez de sorte qu'il ne laisse passer que les signaux par bande de 10 Hz. Premier effet : il n'y a pas de musique « dans tous les canaux ». Deuxième effet : votre spectro vous montre des pics dans certains canaux seulement, d'amplitude fluctuant irrégulièrement en avec le temps. Troisième effet : « dans les canaux où il y a de la musique » votre oscillo vous montre une courbe qui est une sinusoïde plus pure que dans le cas de la parole, dont l'amplitude fluctue irrégulièrement avec le temps. En outre, vos photos vous montrent que le pic au spectro et la sinusoïde à l'oscillo sont corrélés en temps et en amplitude (c'est-à-dire que l'un existe quand l'autre existe, et que plus l'un est haut plus l'autre est ample). Vous vous dites à juste titre : je suis en face de signaux périodiques sinusoïdaux avec des fréquences régulièrement espacées (fondamentale et harmoniques), signaux dont l'amplitude maximale varie elle-même avec le temps..

Vous déduisez de cette seconde expérience les conclusions suivantes :

- en « découpant en tranches fines » de fréquence un signal périodique non sinusoïdal, on trouve des signaux sinusoïdaux uniquement sur certaines fréquences (fréquence fondamentale et harmoniques).
- un signal périodique non sinusoïdal est donc la somme d'un très grand nombre de signaux simples sinusoïdaux¹¹, mais étagés en fréquence fondamentale et harmoniques..

¹⁰ Cette seconde conclusion est exacte mais, en toute rigueur, n'est pas démontrée par l'expérience. Il faudrait pour cela avoir « enregistré toutes les tranches » et les reproduire simultanément, ce qui nécessite d'autres appareils. Commandez les donc au Père Noël l'an prochain...

¹¹ même remarque que pour la note précédente.

Bravo, vous venez de découvrir expérimentalement ce qu'est la série de Fourier : à un signal périodique non sinusoïdal on peut associer, de façon discontinue (en mathématiques, on dit « de façon discrète »), à certaines fréquences du spectre considéré régulièrement espacées (fondamentale et harmoniques), un signal sinusoïdal dont l'amplitude maximum varie avec le temps. On est donc en présence, à tout moment, « d'une infinité discontinue de signaux » sinusoïdaux superposés.

Troisième expérience : le professeur de guitare donne le LA avec son diapason

Votre récepteur est réglé en bande large. Vous reconnaissez facilement la note de musique, c'est-à-dire un signal périodique « simple ». Le spectro vous montre un paysage simple : un seul pic sur une seule fréquence (celle du LA) avec une amplitude constante (tant que le diapason est appuyé sur la guitare). L'oscillo vous montre un paysage très simple également : une seule vague¹², une parfaite sinusoïde d'amplitude maximum constante dans le temps. Vous vous dites, à juste titre : je suis en face d'un signal périodique sinusoïdal, avec une seule fréquence.

Le diapason résonne toujours toujours mais, maintenant, vous décidez de passer votre récepteur en « bande étroite », plus exactement vous le réglez de sorte qu'il ne laisse passer que les signaux par bande de 10 Hz. Premier effet : tous les canaux sauf un (celui qui contient le LA) sont vides. Deuxième effet : votre spectro ne vous montre rien, sauf dans le canal du LA où est installé un pic d'amplitude constante avec le temps. Troisième effet : votre oscillo vous confirme que seul le canal du LA est occupé, et qu'il l'est par une sinusoïde pure, dont l'amplitude est constante dans le temps. Il est donc inutile de faire des photos. Vous vous dites à juste titre : je suis en face d'un signal sinusoïdal pur de fréquence fixe et d'amplitude constante dans le temps.

Vous déduisez de cette troisième expérience ce que vous saviez déjà : un signal périodique sinusoïdal est caractérisé par sa seule fréquence et son amplitude maximum constante dans le temps.

Résumons nous et généralisons vos constatations, toujours sans mathématiques

En résumé, vous avez constaté que les « signaux audio » (les sons) peuvent être classés en 3 groupes ; en allant du plus simple au plus compliqué :

- les signaux périodiques sinusoïdaux (par exemple, les notes)
- les signaux périodiques non sinusoïdaux (par exemple, les accords répétés)
- les signaux non périodiques (par exemple la parole¹³)

L'étude des signaux du second et du troisième groupe peut se ramener à l'étude, beaucoup plus simple, des signaux du premier groupe à l'aide de deux outils mathématiques appelés respectivement « série de Fourier » et « transformée de Fourier ».

Ce que nous venons de voir pour les sons est généralisable à tous les phénomènes (périodiques ou non comme on a vu avec la parole), dès l'instant où il s'agit de signaux¹⁴. Les

¹² Malheureusement, la langue française, contrairement à beaucoup d'autres (allemand, anglais, espagnol notamment), emploie deux mots différents (ondes et vagues) pour désigner le même phénomène.

¹³ A condition de ne pas rabacher continuellement la même chose, car on revient alors au groupe précédent...

¹⁴ au sens de la théorie des signaux, c'est-à-dire qu'il y a production d'un phénomène à un endroit et un moment donnés, phénomène qui en provoque un autre à un endroit (identique ou non) donné et à un moment donné (identique ou non) ; la propagation des variations de température dans la barre métallique de Joseph Fourier était un signal.

ondes électromagnétiques en sont un parfait exemple ; en particulier, la lumière : l'arc en ciel est une « magnifique transformation de Fourier » in situ.

In cauda venenum : un tout petit peu de mathématiques quand même

Rassurez vous, ce sera très simple.

Pourquoi faut-il deux outils mathématiques (série de Fourier et transformée de Fourier) et non un seul ?

Parce qu'on a à traiter deux problèmes de complexité très différente et qu'il est préférable, même si fondamentalement le problème est de même nature, d'adapter l'outil au problème¹⁵ :

- un signal périodique est beaucoup plus simple qu'un signal non périodique car sa description sur un bref moment (une période) suffit à le décrire entièrement : la « série de Fourier », expression sous forme d'une somme dénombrable (c'est la définition mathématique d'une série) de signaux sinusoïdaux harmoniques est l'outil simple (?) adapté.
- un signal non périodique est infiniment (sic) plus compliqué car sa description ne peut se faire que sur toute sa durée qui peut être très longue (voire infinie) : la « transformée de Fourier », expression sous forme d'une fonction continue de la fréquence sur tout le spectre, fonction qui se calcule elle-même avec une intégrale sur tout le temps, est l'outil complexe (ô combien !) adapté.

Le venin dans la queue, c'est le mot « intégrale » que je viens de lâcher. Certes, « intégrale » rime avec « mygale » pour les non matheux (et pour beaucoup de matheux aussi, rassurez vous), mais disons simplement qu'une intégrale c'est une somme d'un très grand nombre de valeurs, dont chacune est très petite¹⁶ ; or, une façon de trouver le chaînon manquant entre signal périodique et signal non périodique est précisément d'augmenter la période à l'infini, c'est-à-dire de faire tendre la fréquence vers zéro : la série de Fourier devient alors « tellement dense » (parce que l'espacement entre harmoniques se réduit et tend aussi vers zéro) qu'elle se met à ressembler de plus en plus à une intégrale... Et la boucle est bouclée.

¹⁵ Qu'il s'agisse de ravitailler les halles de Rungis ou de livrer des pizzas à domicile, on a à faire à un problème de transport ; si, pour le résoudre, on dispose des deux « outils de transport » que sont une mobylette et un 36 tonnes, il y a fort à parier qu'on n'utilisera pas indifféremment l'un et l'autre dans les deux cas...

¹⁶ que les spécialistes des intégrales (je n'ai pas dit « les intégristes ») me pardonnent ce raccourci osé.