RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES ET NOMBRES COMPLEXES
par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX

Dans des articles précédents sur le même site, on a évoqué d'une part l'utilisation des nombres complexes en électromagnétisme, d'autre part la résolution de certaines équations (celles du troisième degré) dans le corps des nombres réels.

Or, certains problèmes d'électromagnétisme amènent à s'intéresser d'emblée à des équations dont les coefficients sont eux-mêmes des nombres complexes, équations dont on recherche les racines dans le corps des nombres complexes. La question qui se pose alors est la suivante : les méthodes et les formules apprises pour le cas des nombres réels s'appliquent-elles ? La réponse à cette question est « oui » pour les cas les plus simples (ceux d'équations du 1er degré), mais « non » pour les équations du 2ème et du 3ème degré.

1 - Généralités

Pour le premier degré, en effet, une équation de la forme $a.x+b=0$ (dans laquelle $a\neq 0$) admet pour racine unique $x=-\dfrac{b}{a}$ qu'on soit dans le corps des nombres réels ou dans celui des nombres complexes.

Pour le 2ème et le 3ème degrés, en revanche, les méthodes et les formules apprises dans le cas des réels font référence au signe de certaines grandeurs, appelées discriminants (les fameux $\Delta = b^2-4.a.c$ pour le 2ème degré et $\Delta = 4.p^3+27.q^2$ pour le 3ème degré). Or, la notion de nombres positifs ou négatifs ne s'appliquent pas aux nombres complexes. En outre les formules, dans le cas des réels, utilisent des radicaux (symbolisant des racines carrées ou cubiques), qui sont sans signification dans le cas des complexes.

Nous allons donc examiner comment résoudre les équations de degré supérieur à 1 lorsque leurs coefficients sont des nombres complexes, en allant du cas le plus simple (le 2ème degré) au plus compliqué (le 3ème degré). Mais auparavant, nous ferons un rappel sur la notion de puissance entière et de racine nième d'un nombre complexe, car il s'agit du nœud du problème.

2 - Rappel sur la notion de puissance entière et de racine n-ième d'un nombre complexe (l'usage veut qu'on dise « racine carrée » quand n=2 et « racine cubique » quand n=3) :

Soit un nombre complexe dont le réel positif A est le module, et dont le réel θ est l'argument ; il s'écrit donc :

$$q \quad Z = A.e^{j.\theta} = A.\cos\theta + j.A.\sin\theta = \left[A,\theta\right]$$

On sait que le nombre complexe obtenu quand on le multiplie n fois par lui-même vaut

$$Y_n = Z^n = A^n.e^{j.n.\theta} = A^n.\cos n.\theta + j.A^n.\sin n.\theta = \left[A^n, n.\theta\right]$$

Inversement, on fait correspondre au nombre complexe Z, ce qu'on appelle « ses n racines n-ièmes », qui sont les n nombres complexes

$$X_{n,k} = A^{1/n}.e^{j.\left(\frac{\theta}{n}+2.k.\frac{\pi}{n}\right)} = A^{1/n}.\cos\left(\frac{\theta}{n}+2.k.\frac{\pi}{n}\right) + j.A^{1/n}.\sin\left(\frac{\theta}{n}+2.k.\frac{\pi}{n}\right) = \left[A^{1/n},\left(\frac{\theta}{n}+2.k.\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

obtenus quand le nombre entier k varie de 1 à n.

Exemple des n racines n-ièmes du nombre 1

Le nombre 1 s'écrit sous la forme du nombre complexe : $1 = 1.e^{j.2.\pi} = [1, 2.\pi]$

Donc, ses n racines n-ièmes valent $1_{n,k} = e^{j.\left(2.k.\frac{\pi}{n}\right)} = \cos\left(2.k.\frac{\pi}{n}\right) + j.\sin\left(2.k.\frac{\pi}{n}\right) = \left[1, 2.k.\frac{\pi}{n}\right]$

Par exemple, les 3 racines cubiques de 1 sont

$$1_{n,k} = e^{j.\left(2.\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + j.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1_{n,k} = e^{j.\left(4.\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} - j.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1_{n,k} = e^{j.\left(6.\frac{\pi}{3}\right)} = 1$$

3 – Cas des équations du 2ème degré :

En reprenant la forme usuelle, une équation du second degré s'écrit sous la forme $a.x^2 + b.x + c = 0$ (dans laquelle $a \neq 0$ et les coefficients sont des nombres complexes).
On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$a.\left\{\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4.a.c}{4.a^2}\right\} = 0$$

Or, le nombre complexe $\{b^2 - 4.a.c\}$ admet 2 racines carrées, qui sont d'ailleurs opposées, et que nous appellerons δ_1 et $\delta_2 = -\delta_1$

Toute équation du second degré $a.x^2 + b.x + c = 0$ (dans laquelle $a \neq 0$ et les coefficients sont des nombres complexes) admet donc 2 racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b + \delta}{2.a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \delta}{2.a}$$

en prenant pour δ l'une quelconque des 2 racines carrées du nombre complexe $\{b^2 - 4.a.c\}$

4 – Cas général des équations du 3ème degré :

En reprenant la forme usuelle, une équation du troisième degré s'écrit sous la forme $X^3 + p.X + q = 0$ dans laquelle p et q sont des nombres complexes.
Posons $X = A + B$, ce qui conduit à :
$(A+B)^3 + p.(A+B) + q = 0$ ou encore $A^3 + B^3 + (3.A.B + p).(A+B) + q = 0$

Si, maintenant, nous lions A et B par la relation $A.B = -\frac{p}{3}$, nous obtenons $A^3 + B^3 = -q$
Nous connaissons donc le produit et la somme des 2 quantités A^3 et B^3, ce qui permet de les identifier comme les racines Y1 et Y2 de l'équation du second degré :

$Y^2 - \left(A^3 + B^3\right).Y + A^3.B^3 = 0$ qui s'écrit ici : $Y^2 + q.Y - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Le nombre complexe $\Delta = q^2 + 4.\dfrac{p^3}{27}$ admet 2 racines carrées.
Soit δ l'une quelconque d'entre elles.

On sait alors que l'équation $Y^2 + q.Y - \dfrac{p^3}{27} = 0$ admet 2 racines qui sont

$$Y_1 = \frac{-q+\delta}{2}$$

$$Y_2 = \frac{-q-\delta}{2}$$

Le problème est maintenant de calculer les 2 nombres complexes *A* et *B* dont nous savons que :

- si on prend pour A l'une des 3 racines cubiques de Y_1 , alors *B* est une des racines cubiques de Y_2

- toutefois, *B* n'est pas n'importe quelle racine cubique de Y_2 car le produit $A.B = -\dfrac{p}{3}$

La méthode la plus simple consiste donc à prendre successivement pour *A* les 3 racines cubiques successives A_1 , A_2 , A_3 de $Y_1 = \dfrac{-q+\delta}{2}$ et à associer, à chacune de ces 3 racines cubiques de Y_1, les 3 racines cubiques de Y_2 désignées respectivement B_1 , B_2 , B_3 et qui valent :

$$B_1 = \frac{-p}{3.A_1}$$

$$B_2 = \frac{-p}{3.A_2}$$

$$B_3 = \frac{-p}{3.A_3}$$

Pour récapituler la résolution d'une équation du 3ème degré $X^3 + p.X + q = 0$ dans laquelle p et q sont des nombres complexes, il convient de procéder comme suit :

<u>Etape 1 :</u> on calcule le nombre complexe $\Delta = q^2 + 4.\dfrac{p^3}{27}$

<u>Etape 2</u> : on calcule l'une quelconque de ses deux racines carrées ; on la désigne par δ

<u>Etape 3 :</u> on calcule le nombre complexe $Y_1 = \dfrac{-q+\delta}{2}$

<u>Etape 4 :</u> on calcule les 3 racines cubiques A_1 , A_2 , A_3 de $Y_1 = \dfrac{-q+\delta}{2}$

<u>Etape 5 :</u> les 3 racines de l'équation $X^3 + p.X + q = 0$ sont alors données par

$$X_1 = A_1 + \frac{-p}{3.A_1}$$

$$X_2 = A_2 + \frac{-p}{3.A_2}$$

$$X_3 = A_3 + \frac{-p}{3.A_3}$$

5 – Cas particulier des racines complexes des équations du 3ème degré à coefficients réels :

Il s'agit du cas de l'équation $X^3 + p.X + q = 0$ dans laquelle :

- les nombres p et q sont des nombres réels,
- le discriminant $\Delta = q^2 + 4.\frac{p^3}{27}$ est positif,
- on cherche non seulement à la racine réelle, mais aussi les racines complexes.

L'application de la méthode précitée au § 4 ci-dessus conduit alors, après calcul, au résultat suivant :

- on calcule les 3 nombres réels suivants :

$$\Delta = q^2 + 4.\frac{p^3}{27}$$

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$b_0 = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

- les 3 racines de l'équations sont alors les suivantes (la 1ère est réelle, les 2 autres non) :

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$x_2 = -\frac{a_0 + b_0}{2} + j.\frac{a_0 - b_0}{2}.\sqrt{3}$$

$$x_3 = -\frac{a_0 + b_0}{2} - j.\frac{a_0 - b_0}{2}.\sqrt{3}$$