**LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU TROISIEME DEGRE**
*par Jean-Pierre Bourdier, F6FQX*

On apprend au collège à résoudre les équations du 1$^{er}$ et du 2$^{ème}$ degré, mais pas celles de degré plus élevé[1].
Or, il arrive que dans quelques problèmes[2], on se retrouve face à des équations du 3$^{ème}$ degré dont il faut rechercher les solutions éventuelles. Sans préparation, le chemin de cette recherche peut-être « long et parsemé d'embûches » comme dirait Zadig.
Ce qui est proposé ici est double :

- pour ceux qui ne veulent pas s'embarrasser de théorie, un petit tableur Microsoft Excel donne directement les solutions ; il suffit d'y entrer les trois coefficients de l'équation en question ($x^3+ax^2+bx+c=0$).
- Pour ceux qui veulent en savoir un peu plus sur la méthode, la présente note explique la méthode et le cheminement qui aboutit aux formules.

Pour l'anecdote, signalons que la résolution des équations du troisième degré est généralement attribuée à Jérôme Cardan (1501-1576), également connu pour avoir inventé la fameuse articulation mécanique qui porte son nom et dont les amateurs de vieilles voitures connaissent les prouesses[3]…
Dans ce qui suit, sauf exception explicite, tous les nombres seront des nombres réels.

**Etape n°1 : mise d'une équation du 3$^{ème}$ degré quelconque sous forme canonique**
Considérons l'équation du 3$^{ème}$ degré (E) suivante :

$$x^3 + a.x^2 + b.x + c = 0$$

que nous allons, par une translation sur la variable, ramener à la forme canonique (E') :

$$X^3 + p.X + q = 0$$

Pour cela, posons $x = X + g$ et reportons dans (E) ; il vient, après regroupement des termes, l'équation (E'') :

$$X^3 + (a + 3.g).X^2 + (2.a.g + b + 3.g^2) + (a.g^2 + b.g + c + g^3) = 0$$

Si maintenant, nous prenons pour $g$ , $p$, $q$ les valeurs suivantes :

$$g = -\frac{a}{3}$$

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$q = c - \frac{a.b}{3} + \frac{2.a^3}{27}$$

et (E'') s'écrit alors bien sous la forme canonique (E') :

$$X^3 + p.X + q = 0$$

**Etape n°2 : comment ramener le problème à la résolution d'une équation du 2$^{nd}$ degré**
Dans l'équation (E')

[1] Pour être plus précis, disons que l'auteur a fait connaissance avec les équations du 1$^{er}$ degré en classe de 5$^{ème}$, et avec celles du 2$^{ème}$ degré en classe de troisième, mais que cela se passait dans les années 50… Peut-être les programmes ont-ils changé depuis ces temps lointains ?
[2] Il faut préciser qu'en électricité et en radio, les problèmes du 3$^{ème}$ degré sont rares, contrairement à ce qu'on rencontre en thermodynamique ou en génie civil.
[3] A propos d'une rapide histoire des mathématiques et des chiffres, on peut relire sur le même site l'article intitulé **Et si OM voulait dire Ohmo Mathematicus ?**

$X^3 + p.X + q = 0$
posons $X = A + B$
ce qui conduit à :
$(A+B)^3 + p.(A+B) + q = 0$
ou encore
$A^3 + B^3 + (3.A.B + p).(A+B) + q = 0$
Si, maintenant, nous lions A et B par la relation
$A.B = -\frac{p}{3}$
nous obtenons
$A^3 + B^3 = -q$
Nous connaissons donc le produit et la somme des 2 quantités $A^3$ et $B^3$, ce qui permet de les identifier comme les racines Y1 et Y2 de l'équation du second degré :
$Y^2 - (A^3 + B^3).Y + A^3.B^3 = 0$
qui s'écrit ici :
$Y^2 + q.Y - \frac{p^3}{27} = 0$.
Nous savons qu'il faut alors s'intéresser au signe du discriminant
$\Delta = q^2 + 4.\frac{p^3}{27}$
ou, plus simplement, de
$D = 4.p^3 + 27.q^2$

**Etape n°3 : discussion des différents cas**

**1er cas** $D \geq 0$
L'équation en *Y* a deux solutions réelles
$Y_1 = \frac{-q + \sqrt{D/27}}{2}$
et
$Y_2 = \frac{-q - \sqrt{D/27}}{2}$
Or
$A = \sqrt[3]{Y_1}$
et
$B = \sqrt[3]{Y_2}$.
Donc l'équation en *X* a une seule solution qui est
$X = A + B = \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}$
qui s'écrit
$X = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{D/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{D/27}}{2}}$

**2ème cas** $D \leq 0$

L’équation en $Y$ a deux solutions complexes conjuguées. Est-ce à dire qu’elle n’a pas de solutions réelles ? Non, car la somme de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel. L’équation a donc trois racines réelles qu’on peut écrire :

$$X_1 = Z_{1.1} + Z_{2.1}$$

$$X_2 = Z_{1.2} + Z_{2.2}$$

$$X_3 = Z_{1.3} + Z_{2.3}$$

formules dans lesquelles $Z_{k.l}$ est la « racine cubique n° t » de $Y_k$

Il faut en effet se souvenir que tout nombre complexe, de module $\rho$ et d’argument $\theta$ admet 3 racines cubiques de module $\sqrt[3]{\rho}$

et d’argument

$$\left(\frac{\theta}{3} + 2.k.\frac{\pi}{3}\right)$$

avec

$$k \in \{0,1,2\}$$

Dans le cas qui nous intéresse, l’équation en Y admet les deux solutions complexes conjuguées suivantes :

$$Y_1 = \frac{-q + i.\sqrt{-D/27}}{2}$$

$$Y_2 = \frac{-q - i.\sqrt{-D/27}}{2}$$

Le carré de leur module, identique, est donc :

$$|Y_1|^2 = |Y_2|^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{1}{4}.\left(\frac{D}{27}\right)^2 = -\frac{p^3}{27}$$

D’où leur module :

$$|Y_1| = |Y_2| = \sqrt[2]{-\frac{p^3}{27}}$$

D’où le module de $Z_{k.l}$ qui vaut

$$|Z_{k.t}| = \sqrt[3]{\sqrt[2]{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[2]{-\frac{p}{3}}$$

Quant aux arguments, on a

$$\cos\left(Arg\{Y_1\}\right) = \cos\left(Arg\{Y_2\}\right) = -\frac{q}{2}.\sqrt[2]{\frac{27}{-p^3}} = \frac{3.q}{2.p}.\sqrt[2]{\frac{3}{-p}}$$

D’où l’argument de $Z_{k.l}$ qui vaut

$$\left(\frac{1}{3}.\arccos\left(\frac{3.q}{2.p}.\sqrt[2]{\frac{3}{-p}}\right) + 2.k.\frac{\pi}{3}\right)$$

avec

$$k \in \{0,1,2\}$$

D’où les 3 solutions réelles de l’équation en X qui valent :

$$X_{\mathrm{k}} = 2.\sqrt[2]{\frac{-p}{3}}.\cos\left(\frac{1}{3}.\arccos\left(\frac{3.q}{2.p}.\sqrt[2]{\frac{3}{-p}}\right)+2.k.\frac{\pi}{3}\right)$$

avec

$k \in \{0,1,2\}$