ELECTROMAGNETISME ET NOMBRES COMPLEXES, PREMIERE PARTIE

(cette première partie est consacrée aux grandeurs scalaires)

L'utilisation des nombres complexes en électromagnétisme présente un grand intérêt, celui « d'éliminer formellement »le temps dans les calculs, et donc de simplifier les calculs en alternatif en les ramenant à ceux du continu.
Cette simplification suppose toutefois d'adopter des conventions et de prendre des précautions, faute de quoi on peut commettre des erreurs.

Convention n°1 : qu'appelle-t-on « intensité complexe associée à une intensité réelle[1] » ?
Soit une intensité, fonction sinusoïdale du temps, qu'on appellera « intensité réelle » parce que c'est celle qu'on mesure, par exemple à l'oscilloscope. Elle s'écrit :

$i(t) = I_M.\cos(\omega.t + \varphi)$

formule dans laquelle on reconnaît :

I_M est un nombre réel positif appelé module ou valeur maximum ou valeur crête,
ω est la pulsation,
$(\omega.t + \varphi)$ est la phase.

A la fonction réelle $i(t)$ de la variable réelle *t*, associons la fonction complexe $I_C(\varphi)$ de la variable réelle φ donnée par :

$I_C(\varphi) = I_M.e^{j.\varphi}$

On voit que la connaissance de $I_C(\varphi)$ entraîne celle de $i(t)$ par la relation

$i(t) = "Partie\_Réelle\_De"\{I_C(\varphi).e^{j.\omega.t}\}$

Par définition, la fonction $I_C(\varphi)$ est appelée « intensité complexe associée à l'intensité réelle $i(t)$ »

On sous-entend souvent « associée à l'intensité réelle $i(t)$ » pour ne parler que de l'intensité complexe $I_C(\varphi)$, amis il ne faut jamais oublier que $I_C(\varphi)$ n'a de sens que comme outil conventionnel de calcul, contrairement à $i(t)$ qui est une « intensité vraie ». Cette différence de nature nécessite qu'on prenne des précautions.

Précaution :

Seules les opérations linéaires sur $i(t)$ sont transposables à $I_C(\varphi)$; a contrario les opérations non linéaires ne le sont généralement pas.
C'est ainsi que les lois d'Ohm (relation entre résistance, intensité et tension) et de Kirchhoff (addition des intensités en un nœud d'un réseau) seront transposables car elles sont linéaires.

[1] On prend ici le cas d'une intensité, mais on peut de la même façon associer une tension complexe à une tension réelle, une charge complexe à une charge réelle, une composante complexe de vecteur à une composante réelle de vecteur ; dans tous les cas, les grandeurs réelles en question doivent être des grandeurs scalaires fonctions sinusoïdales du temps du type $f(t) = F_M.\cos(\omega.t + \varphi)$, expression dans laquelle F_M est un nombre réel positif appelé module ou valeur maximum ou valeur crête, ω est la pulsation, $(\omega.t + \varphi)$ est la phase (parfois, on appelle phase la seule grandeur φ ; le contexte permet de savoir de « quelle phase » il est alors question).

De même, les opérations d'addition composantes de vecteurs et de dérivation[2] (calcul de gradient et de divergence), qui sont si importantes dans les équations de Maxwell, seront possibles.
En revanche, les opérations du second degré, telles que des calculs de puissance, ne seront pas transposables, puisque la partie réelle du produit de deux nombres complexes n'est généralement pas égale au produit des parties réelles des deux nombres.
C'est pourquoi il faut alors adopter une seconde convention.

Convention n°2 : qu'appelle-t-on « puissance complexe associée à une puissance réelle » ?
Soit une charge reliée à une source, de telle sorte que la tension réelle aux bornes de la charge soit $u(t) = U_M.\cos(\omega.t + \psi)$ et que l'intensité réelle dans la charge soit $i(t) = I_M.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec les deux phases telles que $0 \leq \varphi - \psi \leq \frac{\pi}{2}$

(le raisonnement est facilement transposable au cas où $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi - \psi \leq 0$).
Le produit $p(t) = u(t).i(t) = U_M.I_M.\cos(\omega.t + \psi).\cos(\omega.t + \varphi)$ mesure une puissance instantanée, qu'on peut écrire également sous la forme :

$$p(t) = U_M.I_M.\cos(\varphi - \psi).\cos^2(\omega.t + \varphi) - \frac{1}{2}.U_M.I_M.\sin(\varphi - \psi).\sin(2.\omega.t + \psi)$$

soit $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$

avec $p_1(t) = U_M.I_M.\cos(\varphi - \psi).\cos^2(\omega.t + \varphi)$

et $p_2(t) = -\frac{1}{2}.U_M.I_M.\sin(\varphi - \psi).\sin(2.\omega.t + \psi)$

On constate que

1) $p(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ sont des fonctions réelles du temps dont la pulsation est le double de celle de $i(t)$ et de $u(t)$, ce qui empêche « la même transposition à la notion de puissance complexe ».

2) $p_1(t)$ est un terme toujours positif ; il correspond à la puissance fournie en permanence par la source à la charge ; sa valeur moyenne sur une période vaut

$$W = \overline{p_1(t)} = \overline{p(t)} = \frac{\omega}{2\pi}.\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p(t).dt = \frac{\omega}{2\pi}.\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p_1(t).dt = \frac{1}{2}.U_M.I_M.\cos(\varphi - \psi)$$

On appelle W la puissance active car c'est la puissance constante avec laquelle la même quantité d'énergie serait fournie en régime continu pendant un nombre entier de périodes

[2] Plus précisément, de dérivation par rapport à une variable de position dans l'espace et non par rapport au temps.

3) $p_2(t)$ est un terme purement sinusoïdal ; il correspond aux échanges d'énergie entre charge et source, dont la moyenne sur une période est nulle ; son amplitude

$$W' = \frac{1}{2}.U_M.I_M.\sin(\varphi - \psi)$$

Une mesure de l'ampleur des échanges réactifs est W' que, par convention, on désigne sous le nom de puissance réactive

Si, maintenant, on regroupe W et W' (dont il faut rappeler qu'il s'agit de deux nombres réels) sous forme d'un nombre complexe $W_c = W + j.W'$
on dispose d'une grandeur sans signification physique autre que symbolique, puisqu'on a combiné « des choux et des carottes » (une grandeur qui représente une valeur moyenne et une grandeur qui représente une valeur maximale), mais qui permet de donner une idée à la fois de la puissance active et de la puissance réactive.

La grandeur complexe $W_c = W + j.W'$ est, par convention, appelée « puissance complexe associée à la puissance réelle $p(t)$ »

Si maintenant on revient à l'intensité complexe et à la tension complexe, on voit qu'on peut écrire les formules classiques suivantes

$$W_c = W + j.W' = \frac{1}{2}.U_M.I_M.e^{j.(\varphi-\psi)} = \frac{1}{2}.U_C.I_C^*$$

$$W = "Partie\_Réelle\_De"\{\frac{1}{2}.U_C.I_C^*\}$$

$$W' = "Partie\_Imaginaire\_De"\{\frac{1}{2}.U_C.I_C^*\}$$